[illegible]

[illegible]

[illegible]

und

Polygonometrie

von

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Lehrbuch

der

algebraischen Geometrie,

ebenen und sphärischen Trigonometrie

nebst

Polygonometrie

von

Dr. Ph. Fischer,

Lehrer der reinen Mathematik und praktischen Geometrie an der Gewerbschule zu Darmstadt.

Darmstadt.

Druck und Verlag von C. W. Leske.

1854.

Inhalt.

Drittes Kapitel.

Goniometrie.

Viertes Kapitel.

Ebene Trigonometrie.

Fünftes Kapitel.

Die sphärische Trigonometrie.

Sechstes Kapitel.

Die Grundformeln der Polygonometrie.

Siebentes Kapitel.

Die Ausführung der Zahlenrechnungen.

Achtes Kapitel.

Anhang.

Vorwort.

Nachdem ich in den Jahren 1850, 1851 und 1852 die drei ersten Bücher des Frankoeur'schen Lehrkurses der reinen Mathematik bearbeitet, war es meine Absicht, in derselben Weise auch das vierte Buch dieses Werkes, die ebene Trigonometrie und analytische Geometrie enthaltend, umzuarbeiten. Bald aber drang sich mir die Ueberzeugung auf, daß einestheils die algebraische Geometrie, die ebene Trigonometrie und Polygonometrie ausführlicher behandelt werden müßten als es im Originalwerk der Fall war, und anderntheils die sphärische Trigonometrie, die in jenem erst im sechsten Buche folgt, nicht von der ebenen getrennt werden dürfe. Hierdurch reifte denn der Entschluß in mir, die Bearbeitung des vorliegenden Werkchens unabhängig von dem früher mir vorschwebenden Original vorzunehmen, und dadurch mir zugleich die Freiheit zu erhalten, einem besseren Lehrgang möglichst Rechnung tragen zu können.

Ich habe die hier abgehandelten Lehrsätze und Formeln, so vollständig als es in einem Lehrbuch, das äußerster Kürze sich befleißigen soll, möglich ist, darzustellen gesucht und habe dabei vorzugsweise mein Hauptaugenmerk auf eine methodische Entwicklung und eine tüchtige, auch praktische, Einübung des Erlernten gerichtet. Wie weit mir die Erreichung dieses vorgesteckten Zieles gelungen, bin ich wohl nicht im Stande unbefangen zu beurtheilen, aber der Erfolg, den ich in dem nun verflossenen Semester, wo ich an der höheren Gewerbschule genau nach dem vorliegenden Werkchen lehrte, gehabt habe, ist ein recht befriedigender. —

In die Anwendung der Algebra auf die Geometrie habe ich ein gewisses System zu bringen gesucht und dabei freilich nicht vermeiden

können, daß einige Sätze, die schon in der Elementargeometrie abgehandelt sind, wiederholt wurden; überdies habe ich in diesem Kapitel, durch die regelmäßigen Vielecke im Kreis die Idee, die Winkel in der Rechnung zu betheiligen, eingeführt. In dem Capitel von der Construction der Gleichungen habe ich von der in neuerer Zeit so fruchtbar gewordenen Lehre von den harmonischen Theilungen Notiz genommen; ich hielt dies für den passendsten Platz und glaube nicht zu viel daran gethan zu haben. Zur Anregung ist das Gegebene aber wohl auch genug.

In der Goniometrie suchte ich den Zusammenhang der Funktionen der stumpfen und überstumpfen Winkel mit denen der spitzen, und die Zeichen jener möglichst zu begründen, und auf die vorhergehenden Kapitel der algebraischen Geometrie zu stützen. Ich wollte dadurch das Erlernen dieses, dem Anfänger schwierigeren, Theiles möglichst erleichtern.

Die Anzahl der gegebenen trigonometrischen Formeln ist zwar wohl nicht zu gering, da keine der wichtigeren fehlt; sie wird aber auch hoffentlich nicht als zu groß angesehen werden können. Durch den Paragraphen, worin goniometrische Gleichungen gelöst werden, suchte ich die Schwierigkeiten, die dem Lernenden bei Lösung trigonometrischer Aufgaben entgegentreten nach und nach zu überwinden. Hier wird die Lösung der Gleichungen erlernt, so daß für die späteren Aufgaben nur das Ansetzen derselben als zu überwindende Schwierigkeit übrig bleibt.

In den ersten Paragraphen der eigentlichen Trigonometrie habe ich die schönen Formeln gestellt, welche zwar ohne die Seiten, aber doch nur zwischen solchen Winkeln bestehen, deren Summe gleich 180°, also füglich speciell den Dreieckswinkeln beigelegt werden können. Sie sind in der Folge nicht ohne Wichtigkeit.

Auch in der Trigonometrie habe ich die Schwierigkeiten, die in den Aufgaben vorkommen, zu trennen gesucht und zuerst Aufgaben gegeben, wo eine bestimmt vorgeschriebene Formel gefunden werden soll, das Ziel also vorgesteckt ist; später erst ging ich zu den gewöhnlichen trigonometrischen Aufgaben über. Dieselben sind auch wieder zweierlei Art: Aufgaben über das einfache Dreieck und complicirtere Aufgaben, die mit Hülfe des Dreiecks gelöst werden können.

Was die sphärische Trigonometrie anlangt, so lege ich einiges Gewicht darauf, daß ich mit dem rechtwinkligen Dreieck angefangen. Dieser Gang ist zwar schon von mehreren eingeschlagen worden, aber er ist lange noch nicht so allgemein anerkannt, als er verdient. Denn

hierdurch wird eine Analogie im Lehrgang der ebenen und sphärischen Trigonometrie ermöglicht, welche nicht allein die Aehnlichkeiten zwischen beiden (worauf auch die leichtere Erlernung der letztern sich stützt) in das gehörige Licht setzt, sondern auch wieder den wichtigen Unterschied, der in der Winkelsumme, resp. in den drei Winkeln liegt, augenfälliger macht; so daß auf diesem Wege die Grundzüge der sphärischen Trigonometrie dem Lernenden weit durchsichtiger werden, als auf jedem andern. Die Uebungen zur sphärischen Trigonometrie sind besonders der körperlichen Geometrie entnommen, obwohl ich einige aus der sphärischen Astronomie nicht völlig vermeiden konnte.

In der Polygonometrie habe ich nur das Nothwendigste gegeben, wie dies nach meiner Ansicht ein Lehrbuch der Trigonometrie auch nicht anders darf. — Die Ausführung der Zahlenrechnungen ist dagegen etwas breiter und ausführlicher behandelt; da mich aber die große Wichtigkeit dieses Kapitels durchdrungen hat, so fürchte ich nicht, zuviel gethan zu haben. — Die Theilungsaufgaben sind freilich nur angedeutet, aber weil sie nichts als eine specielle Aufgabenart sind und höchstens anregend wirken sollten, doch wohl genügend. —

Schließlich bemerke ich noch, daß das vorliegende Werkchen mit der bereits erschienenen Algebraischen Analysis und Differential- und Integralrechnung meines verehrten Freundes und Lehrers Professor Dr. Külp und mit den schon bearbeiteten ersten drei Büchern des Francoeur'schen Lehrkursus als Bruchstücke eines nach und nach zu vervollständigenden Gesammtwerkes über das ganze Gebiet der reinen Mathematik, angesehen werden möge; der Art, daß das Ganze nach seiner Vollendung aus folgenden Büchern bestehen wird:

1) Die Arithmetik nach Francoeur. Zweite Auflage, bearbeitet von Dr. Fischer. — Bern bei Dalp. 1851.

2) Die niedere Algebra nach Francoeur. Zweite Auflage, bearbeitet von Dr. Fischer. — Bern bei Dalp. 1852.

3) Die Elementargeometrie nach Francoeur. Zweite Auflage, bearbeitet von Dr. Fischer. — Bern bei Dalp. 1850.

4) Das vorliegende.

5) Die analytische Geometrie in der Ebene, von Dr. Fischer. (Wird dem Vorliegenden bald folgen.)

6) Die algebraische Analysis von Dr. Külp, Professor. — Darmstadt bei Leske. 1853.

7) Die Differential- und Integralrechnung und deren Anwendung auf die Geometrie in der Ebene von Dr. Külp, Professor. — Darmstadt bei Leske. 1853.

8) Die analytische Geometrie im Raum und die Fortsetzung der Integralrechnung von Dr. Külp, Professor.

9) Die Theorie der höheren Gleichungen.

10) Die Variationsrechnung.

11) Die Differenzen- und Summenrechnung.

12) Die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Methode der kleinsten Quadrate.

Ph. Fischer.

Erste Abtheilung.

Algebraische Geometrie.

Erstes Kapitel.

Die Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben.

§. 1. **Die beiden Methoden zur Behandlung geometrischer Aufgaben.** Bei den Beweisen für die Lehrsätze der Elementargeometrie, ebenso wie bei den Lösungen der Aufgaben, welche diesem Zweige der Mathematik angehören, schlägt man je nach der Natur der Aufgabe oder des Lehrsatzes besonders zweierlei Wege ein. Man zeichnet nämlich bei dem einen Weg die den Satz darstellende Figur, sorgt dafür, daß die ihn stützenden (bekannten) Größen ebenso wie die Größen, von welchen er etwas aussagt (die unbekannten), in dieselbe eingetragen werden und sucht dann beide durch allenfalls nothwendige Hülfslinien der Art mit einander zu verbinden, daß ihre Abhängigkeit von einander nach bereits bekannten Sätzen, einleuchtend wird. Die Grundlage dieser Methode ist die Betrachtung der Figur. — Im Gegensatz zu diesem Wege kann man Aufgaben lösen oder gegebene Lehrsätze beweisen, indem man Gleichungen zwischen jenen (bekannten und unbekannten) Größen, allenfalls mit den nöthigen Hülfsgrößen verbunden, ansetzt und dann durch die reichen Hülfsmittel der Algebra gestützt, Reductionen vornimmt, die Hülfsgrößen wegschafft u. s. f., so daß als Endresultat eine einfache Gleichung erscheint, welche direct die Abhängigkeit der bekannten und unbekannten Größen von einander ausdrückt, oder wie man es betrachten will, über die darin vorkommenden Größen überhaupt

etwas aussagt; wenn man nämlich den Ausdruck in Worte gefaßt als geometrischen Satz darstellt. Die Grundlage dieser Methode ist die Rechnung.

Hat auch die erstere, die constructive Methode vor der zweiten, der rechnenden, den Vortheil, daß sie durch die ganze Operation hindurch den Gegenstand der Untersuchung nicht aus den Augen verliert und scharf überlegend Satz auf Satz baut, also den Verstand mehr als die andere zu schärfen im Stande ist, so setzt sie doch auch auf der anderen Seite mehr Scharfsinn, Talent und Uebung voraus, und wir finden uns bei der rechnenden Methode, obgleich sie die obigen Vortheile weniger besitzt, durch die Leichtigkeit, mit der sie Resultate erlangt und durch die Raschheit mit der sich Jeder diese Methode zu eigen macht, reichlich entschädigt; mangelt ja doch auch der ersteren in sehr verwickelten Fällen die Uebersichtlichkeit, während die rechnende Methode, die uns fortan Leitstern sein soll und die wir hier auf die Elementargeometrie als algebraische Geometrie anwenden, immer sich gleich bleibt. Die letztere hat überdies noch den Vortheil, uns deutlich die Bedingungen zwischen den Bekannten und Unbekannten der Aufgabe einander gegenüberzustellen und so leicht und unzweifelhaft erkennen zu lassen, ob ein Problem bestimmt oder unbestimmt, ob es möglich oder unmöglich sei. Was die Praxis, die ja auch nicht aus dem Auge verloren werden darf, anlangt, so hat die Methode, welche die Unbekannten der Aufgaben durch Rechnung findet, einen wesentlichen Vortheil vor der, die sie durch Construction ermittelt, in der größeren Genauigkeit, welche sie möglich macht, voraus. Sobald nämlich die durch Messung bekannten Linien eine bedeutende Größe haben, oder bei geringerer Länge mit großer Genauigkeit bis auf sehr kleine Theilchen ermittelt sind, kann sie die Construction nicht mehr genau erfassen, muß also auch weniger genaue Resultate liefern, als die Rechnung, die die Bekannte in jeder Gestalt, welche sie auch haben mögen, gleich scharf auffaßt *).

---

*) Sobald die Linien eine bedeutende Größe haben, muß man sie auf dem Zeichnungsblatte im verkleinerten Maßstabe auftragen und wird dann die kleinsten Theile nicht mehr darzustellen im Stande sein. So gibt z. B. eine Länge 123° 4′ 7″, in tausendtheiligen Maßstab dargestellt, d. h. tausendmal verkleinert, 1′ 2″ 3‴, 47, wo die 4 Zehntheile der Linie kaum genau in der Zeichnung ausgedrückt werden können, die 7 Hundertheile aber gewiß nicht mehr scharf. Die Einwirkung der 7 Hunderttheil-Linie auf das Resultat geht also verloren. Ebenso verhält es sich mit dem Resultat selbst, was in demselben Falle 1000mal größer genommen werden müßte, und wobei auch der von der Ungenauigkeit, welche jede Construction mitführt, herrührende Fehler, 1000mal größer würde.

Welche Vortheile endlich die rechnende Methode vor der andern in Bezug auf die Förderung der Wissenschaft hat, zeigt einfach die Geschichte der Mathematik. So lange Geometrie und Algebra von einander fern blieben, waren beider Fortschritte nur langsam und besonders ihre Anwendungen nur beschränkter Art; sobald aber beide Zweige der Mathematik sich wechselsweise zu unterstützen anfingen, gingen beide raschen Schrittes einer größeren Vollkommenheit entgegen. Diese Verbindung beider, die seitdem der Schlüssel zu den größten Entdeckungen in der Mathematik geworden ist, verdanken wir besonders den beiden Mathematikern Vieta und Descartes.

§. 2. **Entstehung und Bedeutung der Formeln der algebraischen Geometrie.** Jedes Lehrbuch der Elementargeometrie enthält die durch die Proportionalität der Linien bei Parallelismus, bei ähnlichen Figuren u. s. f. entstehenden Proportionen, und somit die Grundelemente der algebraischen Geometrie. Diesen Formeln ist nun in manchen jener Lehrbücher eine weitere Ausdehnung gegeben, so daß wir schon eine ziemliche Anzahl jener der algebraischen Geometrie beizuzählenden Formeln, voraussetzen könnten. Da aber durch die Uebersichtlichkeit und den Zusammenhang der hier mehr als in dem Lehrgang der Elementargeometrie möglich ist, manches klarer wird, und überdies die Behandlungsart algebraisch-geometrischer Aufgaben im Allgemeinen nicht leicht besser gezeigt werden kann, als gerade durch die Entstehung dieser Formeln, so sollen hier alle die Wichtigeren aus den Fundamenten von Neuem entwickelt werden.

Sämmtliche Formeln der algebraischen Geometrie haben, wie leicht einzusehen, ihre mittel- oder unmittelbare Begründuug in der Proportionalität der Linien. Es ist aber im Voraus zu bemerken nothwendig, daß, mögen wir nun auch annehmen, in den Proportionen bedeuteten die die Linien bezeichnenden Buchstaben noch wirkliche Linien (da eine Linie mit einer andern gemessen werden kann), wir uns doch immer erinnern müssen, daß Linien nicht potenzirt oder überhaupt mit einander multiplicirt werden können; daß also, sobald, wie dies fast immer in der algebraischen Geometrie der Fall ist, die Proportionen durch Multiplication der Glieder aufgelöst und die Rechnungen weiter getrieben werden, die Buchstaben in den Formeln nicht mehr die Linien selbst, sondern die Maßzahlen der, sämmtlich mit derselben Längeneinheit gemessenen, Linien bedeuten. Nur Additionen und Subtractionen zweier Graden, sowie das Messen einer Linie durch eine andere sind auf constructivem Wege mit den Linien selbst ausführbar. — Gehen wir auf die Entstehung der oben beregten Formeln zurück, so können wir dieselbe sowie unseren Zweck hier, durch folgende Betrachtung übersichtlich machen.

Es ist unser Ziel Formeln zwischen den Verschiedenen in einem Dreieck vorkommenden Linien zu erhalten; Formeln der Art haben wir zuerst immer in Form von Propotionen zwischen den Stücken verschiedener Dreiecke und Figuren in so fern dieselben ähnlich sind. Wir müssen also zuerst suchen um die Stücke eines und desselben Dreiecks in eine Formel zu bekommeu, dieses Dreieck durch Hülfslinien in zwei oder mehrere einander ähnliche zu zerlegen resp. verwandeln und hierdurch Proportionen zwischen den einzelnen Theilen des am Ende doch noch zusammengehörigen ersten Dreiecks zu erhalten.

Als solche Hülfslinien eignen sich ganz besonders die Höhen; denn die einzige Höhe z. B. im rechtwinkligen Dreieck theilt dasselbe in zwei unter sich und dem Ganzen ähnliche; je zwei Höhen im schiefwinkligen Dreieck geben vier unter sich ähnliche rechtwinklige und endlich alle drei Höhen zwölf je vier unter sich ähnliche solche Dreiecke. Hierdurch können schon viele Proportionen angesetzt werden, so, daß deren weitere algebraische Behandlung eine große Reihe von geometrischen Formeln zu erzeugen im Stande ist. — Auch die Halbirungen der Winkel im Dreieck führen Proportionen und somit Formeln herbei.

§. 3. **Formeln im rechtwinkligen Dreieck zwischen den Seiten, der Höhe und den Segmenten der Hypothenuse.** Wir haben in Fig. (1) durch die Senkrechte AD, welche von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse BC gefällt ist, zwei unter sich und dem Ganzen ähnliche Dreiecke, in welchen 9 verschiedene Proportionen aufgestellt werden können. Bezeichnen wir, um diese Proportionen kürzer schreiben und besser übersehen zu können, die Hypothenuse BC mit a, die Kathete AC mit b, die AB mit c, die Höhe AD mit h und die beiden durch die Höhe entstehenden Segmente der Hypothenuse CD und BD resp. mit m und n, so bestehen:

I. in den ähnlichen Dreiecken ACD und ABD folgende 3 Proportionen:

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{h}; \quad \frac{b}{h} = \frac{c}{n} \text{ und } \frac{m}{h} = \frac{h}{n};$$

II. in den ähnlichen Dreiecken ACD und ACB:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b}; \quad \frac{b}{h} = \frac{a}{c} \text{ und } \frac{m}{h} = \frac{b}{c},$$

und endlich

III. in den ähnlichen Dreiecken ABD und ABC:

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c}; \quad \frac{c}{h} = \frac{a}{b} \text{ und } \frac{n}{h} = \frac{c}{b}.$$

Durch Umwandlung gehen aus diesen folgende 9 Gleichungen hervor:

I. $bh = cm$; $bn = ch$ und $h^2 = mn$,

II. $b^2 = am$; $bc = ah$ und $bh = cm$ und endlich

III. $c^2 = an$; $bc = ah$ und $ch = bn$.

Von diesen 9 Ausdrücken sind nun 3 Paare identisch, die 9 reduciren sich also auf nur 6, von welchen wir jedoch nur 4 zu unserem weiteren Gebrauche hervorheben; nämlich

$$h^2 = mn \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = am \\ c^2 = an \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$bc = ah \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die übrigen beiden enthalten Seiten, Höhen und Segmente in einem Ausdruck sind uns deßhalb weniger einfach. Aus diesen direct durch Aehnlichkeit erhaltenen Ausdrücken finden wir nun durch algebraisch-geometrische Entwickelungen noch zwei weitere, welche Interesse haben; nämlich durch Addition der beiden Ausdrücke unter (2)

$b^2 + c^2 = a(m + n)$, und da nach Fig. (1) $m + n = a$ ist

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

durch Division derselben beiden Formeln entsteht:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Es mag hier im ersten Augenblick auffallend erscheinen, daß in den Formeln (1), (2) und (4) jedesmal nur 3 Stücke vorkommen, daß also aus zweien bekannten das dritte als unbekanntes ausgerechnet werden kann; wir dürfen aber nicht vergessen, daß man nur dann zu diesen Formeln wird greifen dürfen, wenn der Winkel A als ein rechter im Voraus bekannt ist. Es ist also dieser Winkel immer das dritte zur Bestimmung der unbekannten nothwendige bekannte Stück des Dreiecks.

§. 4. **Formeln im schiefwinkligen Dreieck zwischen den Seiten, den Höhen und den Segmenten der Seiten.** Stellen wir nun ähnliche Betrachtungen im schiefwinkligen Dreieck ABC Fig. (2) und (3) wie im vorigen Pargraphen im rechtwinkligen an; so sind zuerst durch die Senkrechten $AD = h$ und $BE = h'$ vier einander ähnliche rechtwinklige Dreiecke entstanden, nämlich AGE, BGD, ADC und BCE. — Suchen wir hier aus der großen Menge von Proportionen, welche sich ansetzen lassen, diejenigen aus, in welchen außer den Seiten des Dreiecks

selbst nur die Höhen und die auf den Seiten durch die Höhen entstehenden Segmente vorkommen, so sind dies in den Dreiecken ADC und BCE die folgenden:

$$\frac{a}{h'} = \frac{b}{h} \text{ und } \frac{a}{m} = \frac{b}{l} \text{ (wo } m = CE \text{ und } l = CD \text{ ist).}$$

Die erstere gibt $ah = bh'$ und es existirt neben ihr, wie leicht zu übersehen, auch die Gleichung $ah = ch''$ oder

$$ah = bh' = ch'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6);$$

die andere gibt $al = bm$
und man kann ähnlich die beiden $ai = cq$
und $bn = cp$ ..... (7)
ansetzen.

Gehen wir nun zu den Formeln über, welche sich aus diesen rechtwinkligen Dreiecken mit Hülfe der im vorigen Pargraphen gefundenen ansetzen und weiter entwickeln lassen, so sind zunächst in den beiden Dreiecken ABE und BCE nach (4) folgende:

$$a^2 = h'^2 + m^2$$
$$c^2 = h'^2 + n^2$$

durch Subtraction entsteht $a^2 - c^2 = m^2 - n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$

oder $(a + c)(a - c) = b(m - n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$

da $m + n$ nach Fig. (2) $= b$ ist. Führt man für das noch zurückgebliebene m seinen Werth $= b - n$ ein, so ist $m - n = b - 2n$ und es entsteht

$$a^2 - c^2 = b(b - 2n) \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & a^2 = b^2 + c^2 - 2bn \\ \text{und} & a^2 = b^2 + c^2 - 2cp \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

da nach (7) $bn = cp$ ist.

Hätten wir, statt von dem spitzwinkligen Dreieck Fig. (2) auszugehen, das stumpfwinklige Fig. (3) zu Grunde gelegt, so wären die Gleichungen vor (8), und (8) selbst zwar dieselben gewesen, aber da dort $b = m - n$ ist, so würde (9) zu

$$(a + c)(a - c) = (m + n) b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9^a)$$

geworden sein, und dies durch $m = b + n$ weiter zu

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10^a).$$

Wenn man in der obigen Gleichung (8), statt das m wegzubringen, für das n^2 seinen Werth setzt, so entsteht im spitzwinkligen Dreieck Fig. (2) dieselbe Gleichung, die auch im stumpfwinkligen Fig. (3) statt

hat; weil, obgleich im einen $n = b - m$ und in anderen $n = m - b$, doch immer $n^2 = (b - m)^2$ ist. Die Substitution und Reduction ergibt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm \text{ oder mit Hülfe von (7)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2cl.$$

Es ist mithin im stumpfwinkligen Dreieck die Formel nur dann von der des spitzwinkligen Dreiecks verschieden, wenn das darin vorkommende Stück wie oben n bei jenem außerhalb bei diesem innerhalb des Dreiecks liegt. Die Verschiedenheit beider Formeln besteht alsdann blos in dem Vorzeichen des Gliedes, welches jenes Stück enthält. — Die Ausdrücke (10) und (10^a) ergeben:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} = \pm n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11);$$

wo das + Zeichen, d. h. ein positiver Werth der Größe, auf der linken Seite der Gleichung anzeigt, daß das Stück n innerhalb des Dreiecks liegt, daß also das Dreieck bei n einen spitzen Winkel habe, während ein negativer Werth der linken Seite anzeigt, daß n außerhalb der Dreiecks liegt und daß dort ein stumpfer Winkel sich vorfindet. Da aber der positive oder negative Werth des ganzen Bruches nur davon abhängt, ob $b^2 + c^2 > a^2$ oder $b^2 + c < a^2$ ist, so liegt hierin ein Kennzeichen für den zwischen b und c eingeschlossenen Winkel. Für $a^2 = b^2 + c^2$ fände die Formel (4) statt und der Winkel A wäre $= 90^0$.

Setzt man den Werth (11) in die Gleichung $h'^2 = c^2 - n^2$ ein, so entsteht:

$$h'^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2}$$

$$\text{oder } h'^2 = \frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4b^2}$$

$$= \frac{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{4b^2}$$

$$\text{also } h' = \frac{1}{2b}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \; . \; . \; . \; (12).$$

Man kann hier noch, wie dies gebräuchlich ist $\frac{a + b + c}{2} = s$ setzen, so daß

$$\frac{b + c - a}{2} = s - a, \frac{a + c - b}{2} = s - b \text{ und } \frac{a + b - c}{2} = s - c \text{ ist;}$$

man erhält hierdurch

$$h' = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13),$$

und wenn f den Flächeninhalt des Dreiecks ABC $= \frac{bh'}{2}$ bezeichnet,

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

wird.

Die Formel (13) ist eine Relation zwischen einer Höhe und den drei Seiten des Dreiecks, die Formel (6) ist eine solche zwischen zwei Höhen und zwei Seiten; es ist nun eine weitere gute Uebung, eine dritte hierher gehörige Relation, nämlich eine zwischen den drei Höhen h, h′, h″ und einer Seite, z. B. b, zu suchen. Wir deuten dieselbe hier nur an:

Es bestehen die Gleichungen $ah = bh'$ und $ch'' = bh'$, aus diesen entsteht: $a = \frac{bh'}{h}$ und $c = \frac{bh'}{h''}$, und es wird

$$s = \frac{b}{2hh''}(hh' + hh'' + h'h'') \text{ und}$$

$$s - a = \frac{b}{2hh''}(hh' + hh'' - h'h'') \text{ u. s. f. und endlich}$$

$$h'^2 = \frac{b^2}{4h^4h''^4}(hh' + hh'' + h'h'')(hh' + hh'' - h'h'')$$
$$(hh' + h'h'' - hh'')(hh'' + h'h'' - hh')$$

woraus b leicht hervorgeht.

§. 5. **Formeln im schiefwinkligen Dreieck zwischen den Seiten und den Graden, welche dieselben halbiren.** Die hier in Betracht zu ziehenden Linien sind zweierlei Art, indem sie entweder von den Ecken des Dreiecks aus nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogen, oder in den Mitten senkrecht auf die Seiten selbst errichtet sind. Die ersteren, welche wir Transversalen nennen wollen, mögen uns zuerst beschäftigen.

Ist Fig. (4) BE=t′ eine derartige nach der Mitte E von AC gezogene Grade, so haben wir wie der erste Blick zeigt, zwei Dreiecke ABE und BCE, welche eine Seite $\left(AE = CE = \frac{b}{2}\right)$ gleich haben und für welche das in Formel (10) und (10ª) vorkommende Stück DE gemeinschaftlich, und dabei einmal innerhalb, das anderemal außerhalb des Dreiecks liegt. Man kann also nach (10) im Dreieck ABE und nach (10ª) im Dreieck BCE folgende Gleichungen ansetzen:

$$a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + t'^2 + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot DE \text{ und}$$

$$c^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + t'^2 - 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot DE.$$

Die Addition beider liefert:

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2t'^2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Schreibt man die Gleichung (15) für die beiden Transversalen t' und t, die resp. zu den Seiten b und a gehören, an, also:

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2t'^2 \text{ und}$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2t^2,$$

so entsteht durch Addition und Halbirung

$$c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = t^2 + t'^2 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

und durch Subtraction und Halbirung:

$$\frac{3}{4}(a^2 - b^2) = t'^2 - t^2 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Setzt man auch noch die dritte Gleichung für die Transversale t'' die zur Seite c gehört nach (15) an, so entsteht durch Addition aller drei zusammengehörigen Gleichungen und Halbirung:

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = t^2 + t'^2 + t''^2 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

und durch Elimination des a^2 und b^2 aus dieser und (17)

$$c^2 = \frac{4}{9}\left[2(t^2 + t'^2) - t''^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (19).$$

Betrachten wir nun die in den Mitten der Seiten senkrecht errichteten Graden DG, EG und FG Fig. (5) die resp. mit e, e' und e'' bezeichnet sein sollen, so ist, weil ihr Durchschnittspunkt gleich weit von allen drei Ecken abliegt: $AG = BG = CG = R$. Um nun e' zu finden, liefern die beiden rechtwinkligen Dreiecke AGE und CGE eine und dieselbe Gleichung:

$$R^2 = e'^2 + \frac{b^2}{4};$$

wir müssen nun, um eine zweite Gleichung zwischen diesen Werthen R und e' zu haben, ausdrücken, daß die Entfernung BG ebenfalls $= R$ ist; zieht man hierzu von B aus die Höhe $BI = h'$ und durch G die Parallele HG zu AC so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck BGH,

in welchem $BH = h' - e'$ und $HG = \frac{b}{2} - n$, (da $AI = n$) ist, und das auch $BG = R$ enthält. Es entsteht dann die weitere Gleichung:

$$R^2 = (h'^2 - e')^2 + \left(\frac{b}{2} - n\right)^2.$$

Aus diesen beiden entspringt nun durch Abzug

$$0 = h'^2 - 2h'e' + n^2 - bn$$

ein Ausdruck, der sich leicht weiter reducirt; denn da $h'^2 + n^2 = c^2$ ist, entsteht:

$$e' = \frac{c^2 - bn}{2h'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19^a);$$

weiter ist aus (11) $bn = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$,

also $e' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4h'}$ und mit Hülfe von (13)

$$e' = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)\,b}{8\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

§. 6. **Formeln im schiefwinkligen Dreieck zwischen den Seiten und den Halbirungslinien der Winkel.** Ziehen wir im Dreieck ABC Fig. (6) die Linie BD der Art, daß sie den Winkel bei B halbirt, so theilt diese Linie die Seite b im Verhältniß der beiden anliegenden Seiten, d. h. daß:

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21);$$

ein bekannter Satz, dessen Richtigkeit sich leicht ergibt, wenn man BC über B hinaus um ein Stück $BE = AB$ verlängert und E mit A verbindet; es ist nämlich dann AE parallel zu BD.

Um nun eine Relation zwischen $BD = k$ und den Seiten a, b und c des Dreiecks zu erhalten verfahren wir ähnlich wie §. 5, wir fällen nämlich eine Senkrechte BF von B auf BC und haben dann ähnlich wie dort zwei Dreiecke ABF und CBF, von welchen das eine bei F spitzwinklig, das andere dort stumpfwinklig ist. Aus diesen beiden folgen die Gleichungen:

$$c^2 = k^2 + n^2 + 2n \cdot DF \text{ und}$$
$$a^2 = k^2 + m^2 - 2m \cdot DF.$$

Durch Elimination von DF erhalten wir:

$$a^2n + c^2m = k^2\,(m + n) + mn\,(m + n) \text{ oder}$$
$$a^2n + c^2m = (k^2 + mn)\,b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22),$$

da $m + n = b$ ist. Zur Bestimmung und Wegbringung des m und n

hat man aus (21) $\frac{m}{m+n} = \frac{a}{a+c}$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{oder } m = \frac{ab}{a+c} \\ \text{und analog } n = \frac{bc}{a+c} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

$$\text{alſo: } k^2 = \frac{a^2c + c^2a}{a+c} - \frac{ab^2c}{(a+c)^2},$$

$$\text{oder } k^2 = ac\left\{1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24).$$

§. 7. **Die Lage der vier merkwürdigen Punkte im Dreieck.** Unter den vier merkwürdigen Punkten im Dreieck verſteht man, wie bekannt: 1) den Punkt, wo die drei Höhen ſich treffen; 2) den, wo die drei Transverſalen, 3) den, wo die drei Halbirungslinien der Winkel und 4) den Punkt, wo die drei in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten ſich treffen.

1) Betrachten wir den Schnittpunkt der drei Höhen, ſo iſt bei ihm zu bemerken, daß nach Fig. (2)

$$\frac{AG}{BG} = \frac{EG}{DG} \text{ oder } AG \cdot DG = BG \cdot EG,$$

oder daß die Höhen ſich der Art theilen, daß das Product der Stücke der einen gleich dem Product der Stücke der anderen und der der dritten. — Die Größe der Stücke EG, DG und FG zu finden haben wir:

$$EG^2 + m^2 = DG^2 + l^2 \text{ und}$$

$$\frac{EG}{DG} = \frac{n}{i} \text{ woraus}$$

$$EG^2 = \frac{(l^2 - m^2)\,n^2}{n^2 - i^2} \text{ oder}$$

$$EG = n\sqrt{\frac{l^2 - m^2}{n^2 - i^2}} \text{ und } DG = i\sqrt{\frac{l^2 - m^2}{n^2 - i^2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (25),$$

und hiermit folgt

$$CG^2 = \frac{l^2n^2 - m^2\,i^2}{n^2 - i^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

2) Bei dem Schnittpunkt der 3 Transverſalen iſt nichts zu bemerken, als daß ſich dieſe Linien in ihm, wie bekannt, dritteln.

3) Der Schnittpunkt der drei Halbirungslinien der Winkel liegt, wie die Elementargeometrie lehrt gleich weit von den drei Seiten ab, ſo daß Fig. (7) DG = EG = GF iſt und G der Mittelpunkt des die drei Seiten berührenden (eingeſchriebenen) Kreiſes. Bezeichnen wir

$DG = EG = FG$ mit r und ziehen, um Gleichungen ansetzen zu können, die beiden Höhen $AH = h$ und $CI = h''$ so ist in den ähnlichen Dreiecken ADL und GDL:

$$\frac{HL}{h} = \frac{DL}{r}$$

und in den ähnlichen Dreiecken CIM und GFM

$$\frac{IM}{h''} = \frac{FM}{r}.$$

Nun ist aber $DL = BL - BD$ und $HL = BL - BH$,
und weiter $FM = BM - BF$ und $IM = BM - BI$;
also durch Substitution dieser Werthe in die obigen Proportionen

$$\frac{BL}{h} - \frac{BH}{h} = \frac{BL}{r} - \frac{BD}{r} \text{ und}$$

$$\frac{BM}{h''} - \frac{BI}{h''} = \frac{BM}{r} - \frac{BF}{r}.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so entsteht, da

$$\frac{BH}{h} = \frac{BI}{h''} \text{ und } BD = BF \text{ ist:}$$

$$\frac{BL}{h} - \frac{BM}{h''} = \frac{BL - BM}{r}.$$

Die Werthe BL und BM sind nach (23)

$$BL = \frac{ac}{b + c} \text{ und } BM = \frac{ac}{a + b}.$$

Durch dieselben wird dieser Ausdruck:

$$\frac{1}{h\,(b + c)} - \frac{1}{h''(a + b)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{b + c} - \frac{1}{a + b}\right)$$

oder da $bh' = ch'' = ah$ oder $h'' = \frac{bh'}{c}$ und $h = \frac{bh'}{a}$ ist,

$$\frac{1}{bh'}\left(\frac{a}{b + c} - \frac{c}{a + b}\right) = \frac{1}{r}\;\frac{(a - c)}{(a + b)\,(b + c)} \text{ oder}$$

$$r = \frac{bh'\,(a - c)}{a^2 + ab - bc - c^2};$$

fügt man dem Nenner die Glieder $+ ac - ac$ zu, so ist leicht zu übersehen, daß sich der Bruch mit $a - c$ reduciren läßt; und $a + b + c$ im Nenner zurückbleibt, so daß, weil bh' nach (14)

$$= 2\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)} \text{ ist,}$$

$$r = \frac{2\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}}{a + b + c} \text{ oder} = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}{s}}$$

. . . . (27)

wird.

Gewöhnlich findet man diesen Werth von r auf einem weit kürzeren Wege entwickelt, der aber den Nachtheil mit sich führt, daß seine Grundidee der Aufgabe selbst fremd, mithin eine künstliche erscheint. Man hat nämlich den Inhalt des Dreieck AGC $= \frac{br}{2}$ da r als Höhe in diesem Dreieck angesehen werden kann; ebenso ist Inhalt BGC $= \frac{ar}{2}$ und Inhalt AGB $= \frac{cr}{2}$ also die Summe der Inhalte aller drei Dreiecke, welche den des ganzen Dreiecks bildet

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = f$$

oder mit Hülfe von (14)

$$\frac{r}{2}(a + b + c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ u. s. w.}$$

4) Der Punkt endlich, wo die drei in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten sich schneiden, ist von den drei Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt, ist also der Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises. Wir haben aus Fig. (5) nach dem Paragraphen 5:

$$R^2 = \frac{b^2}{4} + e'^2 \text{ oder}$$

$$R^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{(c^2 - bn)^2}{4h'^2},$$

wenn man für e' den Werth (19ᵃ) §. 5 einführt. Die Reduction gibt

$$R^2 = \frac{b^2h'^2 + c^4 - 2bc^2n + b^2n^2}{4h'^2}$$

$$\text{und } R^2 = \frac{c^2}{4h'^2}(b^2 + c^2 - 2bn),$$

wenn für $h'^2 + n^2$ sein Werth c^2 gesetzt wird. Mit Hülfe von (10) und (13) entsteht dann

$$R = \frac{ac}{2h'^2} \text{ und } R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad \ldots\ldots (28).$$

Gewöhnlich findet man für die Entwickelung von R folgenden Weg eingeschlagen: Winkel AGC ist = 2 ABC, weil der erstere Centri-, der andere Peripheriewinkel ist; es ist also Winkel EGC $= \frac{AGC}{2}$ = ABC und das Dreieck EGC demjenigen ähnlich, welches entsteht,

wenn man von C eine Senkrechte auf AB fällt, also dem Dreieck BCK. Es besteht mithin die Proportion:

$$\frac{2R}{b} = \frac{a}{h'}$$ woraus dann leicht R hervorgeht.

Eliminirt man zwischen den Gleichungen (27) und (28) die Wurzelgröße, indem man beide mit einander multiplicirt, so entsteht:

$$rR = \frac{abc}{2(a+b+c)} \quad \ldots\ldots \quad (29).$$

§. 8. **Formeln zwischen den Seiten einiger regelmäßigen Vielecke und dem Radius des umschriebenen Kreises.** Denken wir uns den Mittelpunkt des einem regulären Vieleck umschriebenen Kreises mit den beiden Endpunkten einer Seite desselben verbunden, so entsteht dadurch ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel am Centrum, wenn die Seite zu einem n=Eck gehört, $= \frac{360^0}{n}$ ist, während jeder der beiden gleichen Winkel $90^0 - \frac{180^0}{n}$ beträgt.

Betrachten wir so die Winkel für das zum regelmäßigen Viereck gehörige Dreieck, so ist der an der Spitze $= 90^0$ und jeder der andern gleich 45^0; es ist also das Dreieck ein rechtwinkliges, gleichschenkliges und die Kathete gleich r, mithin ist die Seite s_4 des regulären Vierecks als Hypothenuse dieses Dreiecks

$$s_4 = r\sqrt{2} = r \cdot 1{,}41421 \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

Für die Seite des regulären Sechsecks werden alle Winkel des obigen Dreiecks $= 60^0$, dasselbe ist mithin ein gleichseitiges und die Seite s_6 des regulären Sechsecks ist

$$s_6 = r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Für die Seite AC des regelmäßigen Zehnecks ist der Winkel an der Spitze des Dreiecks ABC Fig. (8) gleich 36^0 und jeder der beiden gleichen Winkel gleich 72^0; da aber $72^0 = 2 \cdot 36^0$ ist, so entsteht durch Halbirung des Winkels BAC ein zweites Dreieck ACD, das ebenfalls einen Winkel von 36^0 und zwei von 72^0 hat, also dem ganzen Dreieck ABC ähnlich ist. Das andere so entstehende Dreieck ABD ist gleichschenklig, da es zwei Winkel von 36^0 hat. In den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und ACD findet nun folgende Proportion statt: $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{AC}$,

oder wenn AC mit s_{10} bezeichnet wird, da $DC = r - s_{10}$ ist:

$$\frac{s_{10}}{r} = \frac{r - s_{10}}{s_{10}} \quad \ldots\ldots \quad (32).$$

Durch Auflösung dieser Gleichung entsteht:

$$s_{10}^2 + rs_{10} - r^2 = 0 \text{ und}$$

$$s_{10} = \frac{-r \pm \sqrt{5r^2}}{2},$$

oder, da das Minuszeichen bei der Wurzelgröße einen negativen Werth für s_{10} geben würde, also wegfällt:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = r \cdot 0{,}61803 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Mit Hülfe der Zehnecksseite kann man nun auch die Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks finden. Da der Winkel an der Spitze in dem in Rede stehenden Dreieck, das die Fünfzehnecksseite enthält $= 24^0$, so bilden dieser Winkel und der Centriwinkel des Zehnecks, der $= 36^0$ zusammen einen von 60^0. Ist daher Fig. (9) das Dreieck ABC ein gleichseitiges, und hat das Dreieck BCD bei C einen Winkel von 36^0, so bleibt ACD $= 24^0$ übrig und AD ist die Seite des regulären Fünfzehnecks. Es sind also die drei Seiten des Dreiecks ABD: 1) die Seite des regulären Zehnecks (s_{10}), 2) die des regelmäßigen Fünfzehnecks (s_{15}) und 3) der Radius. Wenden wir auf dieses Dreieck die Formel (10) an, so ist:

$$AD^2 = DB^2 + AB^2 - 2 \cdot BD \cdot BE,$$

$$s_{15}^2 = s_{10}^2 + r^2 - 2 \cdot s_{10} \cdot BE.$$

Um nun BE zu erhalten, bemerken wir, daß der Winkel DBC $= 72^0$ und ABC $= 60^0$, also ABD $= 12^0$ ist, weil aber ACD $= 24^0$, so ist $\frac{ACD}{2} = DCF = 12^0$ und das rechtwinklige Dreieck ABE $=$ DCF, also BE $=$ CF.

Da aber $CF^2 = r^2 - \frac{s_{15}^2}{4}$ ist,

so wird die obige Gleichung zuerst durch Umordnen und Quadriren

$$4 \cdot s_{10}^2 \cdot BE^2 = (s_{10}^2 + r^2 - s_{15}^2)^2$$

und dann durch diesen Werth von BE^2 (resp. FC^2)

$$4 \cdot s_{10}^2 \left(r^2 - \frac{s_{15}^2}{4}\right) = (s_{10}^2 + r^2 - s_{15}^2)^2.$$

Es ist nun zuerst:

$$s_{10}^2 + r^2 = r^2 \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} + 1\right) = \frac{r^2}{2}(5 - \sqrt{5}),$$

und dann, wenn dies eingesetzt, ausgeführt und geordnet wird:

$$s_{15}^4 + r^2 \cdot s_{15}^2 \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} - 5 + \sqrt{5}\right)$$
$$- r^4 \left(6 - 2\sqrt{5} - \frac{30 - 10\sqrt{5}}{4}\right) = 0,$$

oder $2 s_{15}^4 - r^2 \cdot s_{15}^2 (7 - \sqrt{5}) + r^4 (3 - \sqrt{5}) = 0.$

Hieraus entsteht:

$$s_{15} = \sqrt{\frac{1}{4}\left\{ r^2 (7 - \sqrt{5}) \pm \sqrt{r^4(7-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 2 \cdot r^4 (3-\sqrt{5})}\right\}}$$

oder $s_{15} = \frac{r}{2} \sqrt{\left\{ 7 - \sqrt{5} \pm \sqrt{6(5-\sqrt{5})}\right\}}$ . . . . . . (34),

wo nur das Minuszeichen vor der innern Wurzel genommen werden darf, also: $s_{15} = r \cdot 0{,}41582.$

Es ist nun nicht schwierig, Formeln zu entwickeln, um aus dem unter (30) berechneten s_4 das s_8, s_{16}, s_{32}, überhaupt jedes $s_{4 \cdot 2n}$, wo n jede beliebige Zahl sein kann, nach und nach zu berechnen. Dieselbe Formel und ihre Verwandten liefern:

aus s_6, was nach (31) bekannt ist: s_3 und s_{12}, s_{24} . . . . . . $s_{3 \cdot 2n}$,
aus s_{10}, was nach (33) bekannt ist: s_5 und s_{20}, s_{40} . . . . . . $s_{5 \cdot 2n}$,
aus s_{15}, was nach (34) bekannt ist: s_{30}, s_{60} . . . . . . $s_{15 \cdot 2n}$.

Um zu diesen hier beregten Formeln zu gelangen, sei in Fig. (10) AB die Seite s_n des regulären eingeschriebenen n-Ecks, also wenn DC den Winkel ACB halbirt AD die Seite s_{2n} des eingeschriebenen entsprechenden 2n-Ecks; es ist hiernach:

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{4} + DE^2$$

$$\text{und } s_{2n}^2 = \frac{2r}{4} \cdot DE,$$

$$\text{also } s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_{2n}^4}{4r^2}.$$

Je nachdem man nun diese Gleichung in Bezug auf s_{2n} oder s_n auflöst, kann man z. B. aus s_6 das s_{12} oder das s_3 berechnen. Das eine gibt:

$$s_{2n}^4 - 4r^2 s_{2n}^2 + r^2 s_n^2 = 0$$

$$\text{und } s_{2n} = \sqrt{2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - r^2 s_n^2}}$$

oder $s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}$ . . . . . (35),

da vor der inneren Wurzel nur das Minuszeichen genommen werden darf. Die Lösung in Bezug auf das andere gibt:

$$s_n = \sqrt{4s_{2n}^2 - \frac{s_{2n}^4}{r^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Da man nun die Seite des regulären eingeschriebenen Vierecks auch als Sehne des Centriwinkels von 90°, und die des entsprechenden Achtecks als Sehne des Winkels von 45° u. s. w. ansehen kann, so ist man aus den obigen vier Werthen: der Sehne von 90°, der von 60°, der von 36° und der von 24° mit Hülfe der Formeln (36) und (35) im Stande, die entsprechenden Sehnen für die Winkel von 45°, 22, 5° .... von 120° und 30°, 15° .... von 72° und 18°, 9° ..... und endlich von 12°, 6°, 3° .... zu berechnen. Man findet so:

für den	Centriwinkel	von	90°	die	Sehnenlänge	= r	. 1,41421
" "	"	"	45°	"	"	= r	. 0,76537
" "	"	"	60°	"	"	= r	
" "	"	"	120°	"	"	= r	. 1,73205
" "	"	"	30°	"	"	= r	. 0,51764
" "	"	"	15°	"	"	= r	. 0,26105
" "	"	"	36°	"	"	= r	. 0,61803
" "	"	"	72°	"	"	= r	. 1,17557
" "	"	"	144°	"	"	= r	. 1,90211
" "	"	"	18°	"	"	= r	. 0,31287
" "	"	"	9°	"	"	= r	. 0,15692
" "	"	"	24°	"	"	= r	. 0,41582
" "	"	"	48°	"	"	= r	. 0,81348
" "	"	"	96°	"	"	= r	. 1,48628
" "	"	"	12°	"	"	= r	. 0,20906
" "	"	"	6°	"	"	= r	. 0,10468
" "	"	"	3°	"	"	= r	. 0,05236

Durch noch weitere Anwendungen der Formel (35) könnte man diese Sehnenreihe noch viel weiter treiben.

§. 9. **Einige mit Hülfe ihrer Winkel durch eine Seite berechenbare rechtwinklige Dreiecke.** Zerlegt man die gleichschenkligen Dreiecke des vorigen Paragraphen, welche durch eine Sehne und zwei Radien gebildet wurden, durch eine Höhe in zwei rechtwinklige, so enthalten diese Dreiecke die Hälften jener Sehnen. Da aber die Hypothenusen sämmtlicher derartiger Dreiecke gleich r bekannt, so lassen sich auch die anliegenden Katheten leicht berechnen. Man findet so z. B. für den Winkel

von

1°,5	die gegenüberliegende	= 0,02618 . r	die anliegende Kathete	= 0,99966 . r
3°	" "	= 0,05234 . r	" " "	= 0,99863 . r
4°,5	" "	= 0,07846 . r	" " "	= 0,99692 . r
6°	" "	= 0,10453 . r	" " "	= 0,99452 . r
7°,5	" "	= 0,13053 . r	" " "	= 0,99145 . r
9°	" "	= 0,15643 . r	" " "	= 0,98769 . r
12°	" "	= 0,20791 . r	" " "	= 0,97815 . r
15°	" "	= 0,25882 . r	" " "	= 0,96593 . r
18°	" "	= 0,30902 . r	" " "	= 0,95106 . r
22°,5	" "	= 0,38268 . r	" " "	= 0,92388 . r
24°	" "	= 0,40674 . r	" " "	= 0,91355 . r
30°	" "	= 0,50000 . r	" " "	= 0,86603 . r
36°	" "	= 0,58779 . r	" " "	= 0,80902 . r
45°	" "	= 0,70711 . r	" " "	= 0,70711 . r
48°	" "	= 0,74314 . r	" " "	= 0,66913 . r
60°	" "	= 0,86603 . r	" " "	= 0,50000 . r
72°	" "	= 0,95106 . r	" " "	= 0,30902 . r

Diese Reihe kann durch Ausdehnung der Sehnenreihe des vorigen Paragraphen noch viel vermehrt werden; aber auch ohne dies kommen noch einige Dreiecke hinzu, wenn man bedenkt, daß die beiden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck Complementwinkel sind, daß also z. B. die dem Winkel von 48° anliegende Kathete gegenüberliegende von 42° ist und umgekehrt.

Man hat also eigentlich nur diese Reihe bis zum Winkel von 45° zu verfolgen und es wäre dann der Winkel von

42° mit der gegenüberliegenden Kathete = 0,66913 . r und der anliegenden Kathete = 0,74314 . r

noch zuzufügen.

Man ist nun im Stande mit Hülfe der obigen Zahlen jedes rechtwinklige Dreieck, dessen bekannter Winkel unter diesen aufgeführten ist, aus einer seiner Seiten völlig zu berechnen. Sind z. B. die beiden spitzen Winkel B und C bekannt, und sind die beiden entsprechend gegenüberliegenden Katheten mit b und c und die Hypothenuse mit a bezeichnet; so wäre:

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{\text{gegenüberliegende Kathete für B.}}\,,$$

also: $$a = \frac{b\,r}{\text{gegenüberliegende Kathete für B.}}$$

und: $$b = a \times \frac{\text{gegenüberliegende Kathete für B.}}{r}.$$

wo der Ausdruck: „gegenüberliegende Kathete für B" den Zahlenwerth jener Kathete aus der obigen Tabelle bezeichnet. Diese Formeln gelten auch für c statt b, sobald C mit B vertauscht wird.

§. 10. **Die Homogenität der Gleichungen der algebraischen Geometrie.** Uebersieht man mit Aufmerksamkeit die Art und Weise wie in den vorhergehenden Paragraphen die Formeln aus Proportionen durch die weiteren Rechnungen entstehen, so bemerkt man leicht, daß, obgleich wir nur mit Zahlen (Maßzahlen der Linien 2c.) in der Rechnung zu thun haben und Zahlen auf jede Weise mit einander verbunden werden können, die Dimension der durch Linien ausgedrückten Raumformen streng gewahrt bleibt. Dies klarer zu machen, bedenke man, daß das Product zweier Linienmaßzahlen nach der Elementargeometrie als die Maßzahl für einen rechteckigen Flächenraum betrachtet werden kann, und daß das Product der Maßzahlen dreier Linien oder das der Maßzahl einer Fläche mit der einer Linie die Maßzahl für den prismatischen körperlichen Raum darstellt; weiter, daß Producte, die zwei Linienmaßzahlen enthalten, als Ausdrücke von zwei Dimensionen und Producte, aus drei Linienmaßzahlen oder aus einer Linien- und einer Flächenmaßzahl als Ausdrücke von drei Dimensionen bezeichnet werden können. Ebenso wenig man nun geometrisch eine Linie und eine Fläche zusammenaddiren kann, ebenso wenig kann, wie die Betrachtung der Entstehung unserer Formeln zeigt, in ihnen ein Glied von einer mit einem Glied von zwei Dimensionen durch + oder — Zeichen verbunden vorkommen. Aus den Proportionen kommt man nämlich zunächst auf Ausdrücke von der Form $ab = cd$ und $b^2 = ac$, und dann auf solche wie $a^2 = b^2 + c^2$ und $a^2 - c^2 = m^2 - n^2$ 2c.; sämmtlich Ausdrücke von zwei Dimensionen. Werden nun diese auch mit Ausdrücken von einer Dimension verbunden, wie es z. B. mit $a^2 - c^2 = m^2 - n^2$ geschah, wo $m = b - n$ war, so mußten diese doch auf dieselbe Dimension mit jenen gebracht werden, ehe eine Substitution oder Verbindung irgend einer Art bewerkstelligt werden konnte. — Wenn also z. B a, b, c, d ...... Linienmaßzahlen bedeuten, so sagt man dann, Ausdrücke wie $a = bc$ oder $b^2 + acd = e$ seien in den Dimensionen falsch; solche unrichtige Ausdrücke können keine geometrische Bedeutung haben und geben ein sicheres Zeichen ab, daß irgend ein Fehler stattgefunden hat. — Man kann zwar Formeln, welche der Art in ihren Dimensionen unrichtig sind, erzeugen, ohne daß gerade behauptet werden könnte, die Gleichungen seien als solche falsch. So z. B. wenn man zur richtigen Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$ die richtige Gleichung $a = m + n$ zufügt, entsteht die in ihren Dimensionen unrichtige: $a^2 + a = b^2 + c^2 + m + n$;

aber eine solche Verbindung ist zwecklos, wird bei Lösung geometrischer Aufgaben nicht vorkommen dürfen und ihr Endresultat hat keine geometrische Bedeutung.

Sollen Ausdrücke wie $f = \frac{bh}{2}$, $v = fh$ zc. richtig sein, so muß, wenn b und h Maßzahlen von Linien sind, f die einer Fläche und v die eines körperlichen Raumes sein.

Ausdrücke wie $\frac{ab}{c}$ sind von einer Dimension, ebenso $\sqrt{ab}$ und ähnliche. Man kann im Allgemeinen sagen, daß durch die Multiplication der Maßzahlen die Dimensionen des Ausdrucks vermehrt, durch die Division dieselben aber entsprechend vermindert werden, durch Potenzirung werden die Dimensionen mit dem Grad vervielfacht und durch Wurzelausziehung getheilt. — Manchmal können sich in speziellen Fällen Ausdrücke erzeugen, die von falschen Dimensionen zu sein scheinen, ohne daß sie es wirklich sind, wenn man nämlich irgend eine der vorkommenden Linien als Maßeinheit der übrigen angenommen, also mit 1 bezeichnet hat. Es wird alsdann diese Linie in allen Producten und Quotienten verschwunden sein. Sollten z. B. in dem Ausdruck $c = \frac{a + b}{1 + ab}$ die Buchstaben a, b und c Linien darstellen und der Ausdruck dennoch richtig sein, so müßte sowohl das 1 im Nenner, als der Factor 1, der dem Zähler zugedacht werden kann, das Quadrat der Maßeinheit sein. Wäre diese Linie mit r bezeichnet, so wäre der Ausdruck

$$c = \frac{(a + b) r^2}{r^2 + ab}.$$

Man darf sich übrigens nicht wundern, wenn während der Rechnung Glieder von geometrisch unmöglichen Dimensionen (von vier und höheren) erscheinen, aber Glieder wie $\sqrt{abc}$ und $\sqrt[3]{ab}$ sind geometrisch unmöglich und im Allgemeinen auch in der Rechnung unrichtig; nur besondere algebraische Verwandlungen können sie erzeugen. Es gibt also diese nothwendige Homogenität der Glieder einer Gleichung, wie man sieht, ein ziemlich gutes Criterium für ihre Richtigkeit in der Art ab, daß, wenn die Dimensionen nicht richtig sind, behauptet werden kann, die Gleichung sei falsch; im Fall sie aber richtig, kann freilich die Richtigkeit der Gleichung nicht bestimmt behauptet werden.

§. 11. **Ueber die Methode der Lösung der geometrischen Aufgaben.** Die Arbeiten bei der Lösung geometrischer Aufgaben mit Hülfe der Rechnung sind zweierlei Art; und zwar ist die erste der Ansatz der die Bekannten und gewählten oder dargebotenen Unbekannten

enthaltende gehörige Anzahl von Gleichungen; die andere ist die Elimination der Unbekannten. In Bezug auf die erstere ist hier im Allgemeinen zu erwähnen, daß alle besondere der Aufgabe wesentliche Bedingungen in die Gleichungen übergehen müssen, und daß man keiner unbekannten Größe vor einer Andern, die gleiche Lage und gleiche Rechte in Bezug auf die Bekannten und Bedingungen der Aufgabe hat, den Vorzug geben darf. Wenn man auch im Uebrigen jede Vermehrung der in die Gleichungen gebrachten Unbekannten so sehr als möglich vermeidet, so ist es doch meist weit besser zwei solche (in Bezug auf die Bekannten und die Bedingungen der Aufgabe gleichstehende) Unbekannte, als nur eine derselben in die Gleichungen einzuführen, indem im ersteren Fall die Elimination trotz der vermehrten Anzahl der Unbekannten dennoch besser von Statten geht, wenn man nur dabei in Bezug auf dieselben die Regel einhält, daß bei symmetrisch gestalteten Gleichungen man die Rechnungen auch der Art führt, daß keiner der gleichartig vorkommenden Unbekannten der Vorzug gegeben wird, sondern alle auch gleichartig behandelt werden. Man thut dabei sehr oft wohl, statt die Unbekannten direct zu ermitteln, ihre Summe, Differenz, Product, Quotient ꝛc. aufzusuchen und jene selbst dann daraus zu finden. Einige Beispiele mögen dies klarer machen.

§. 12. Einige weitere algebraisch-geometrische Aufgaben.

I. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypothenuse $= a$ und die Summe der beiden Katheten $= s$ gegeben. — Wir nennen die unbekannten Katheten y und z (x ist für die Hypothenuse, wenn sie in der Aufgabe unbekannt ist) und haben vor allem die von der Aufgabe gebotene Gleichung:

$$y + z = s.$$

Wir brauchen zu dieser noch eine zweite, welche dieselben Unbekannten und die bekannte Hypothenuse enthält, also:

$$y^2 + z^2 = a^2.$$

Die Elimination geht so, daß weder y noch z einen Vorzug erhält, indem wir die erste Gleichung, damit sie denselben Grad mit der zweiten erhalte, quadriren und die zweite davon abziehen, also:

$$y^2 + z^2 + 2yz = s^2,$$

$$\frac{y^2 + z^2 = a^2}{2yz = s^2 - a^2};$$

es ist mithin das Product der Unbekannten:

$$yz = \frac{s^2 - a^2}{2};$$

aus Summe und Product der Katheten folgt leicht:

$$\left.\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\right\} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{s^2 - a^2}{2}}\,^{*)} = \frac{s \pm \sqrt{2a^2 - s^2}}{2}.$$

Wäre die Differenz $y - z = d$ der beiden Katheten, statt ihrer Summe bekannt gewesen, so würde $yz = \frac{a^2 - d^2}{2}$ geworden sein,

und $$\left.\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} + \frac{a^2 - d^2}{2}\right)} \pm \frac{d}{2}\,^{*)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2a^2 + d^2}{4}\right)} \pm \frac{d}{2}.$$

II. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Hypothenuse und einer Kathete $= s$ gegeben und überdies die andere Kathete $= c$.

Die Gleichung aus der Aufgabe ist:

$$x + y = s$$

und hierzu die zweite mit c:

$$x^2 - y^2 = c^2,$$

hier kommen beide Unbekannten nicht symmetrisch vor, wir können einer den Vorzug geben und substituiren; nehmen wir y aus der ersten in die zweite, so wird:

$$x^2 - (s - x)^2 = c^2 \text{ oder:}$$

$$2sx - s^2 = c^2 \text{ also:}$$

$$x = \frac{s^2 + c^2}{2s} \text{ und } y = \frac{s^2 - c^2}{2s}.$$

Durch Division der ersten der obigen Gleichungen in die zweite entsteht auch die Gleichung vom ersten Grad:

$$x - y = \frac{c^2}{s},$$

wodurch man dann Summe und Differenz der Unbekannten, mithin leicht beide selbst hat **).

---

*) Ist s die Summe und p das Product zweier Unbekannten y und z, so ist allgemein: $$\left.\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\right\} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2};$$ für $y - z = d$ und $yz = p$ ist, wenn blos die positiven Lösungen Werth haben: $$\left.\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p\right)} \pm \frac{d}{2}.$$

Francoeur niedere Algebra, neue Ausgabe, §. 76. 1.

**) Ist $x + y = s$ und $x - y = d$, so ist $x = \frac{s + d}{2}$ und $y = \frac{s - d}{2}$.

III. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Hypothenuse und der einen Kathete = S und die Summe der Hypothenuse und der andern Kathete = s gegeben. Die Gleichungen aus der Aufgabe sind:

$$x + y = S,$$
$$x + z = s,$$

hierzu eine zwischen den drei Unbekannten:

$$x^2 = y^2 + z^2;$$

y und z kommen symmetrisch vor, sind also gleichartig zu behandeln. Man substituirt y und z aus den beiden ersten Gleichungen in die dritte; es entsteht:

$$x^2 = (S - x)^2 + (s - x)^2,$$
$$0 = S^2 + s^2 - 2x (S + s) + x^2,$$
$$x = S + s \pm \sqrt{(S + s)^2 - (S^2 + s^2)},$$
$$x = S + s \pm \sqrt{2Ss};$$

beide Werthe von x sind, wie die letzte Gleichung zeigt, reell, und wie die vorletzte zeigt, positiv, da:

$$\sqrt{(S + s)^2 - (S^2 + s^2)}$$

kleiner als S + s ist; also wären beide Werthe von x in dieser Hinsicht brauchbar, aber da x selbst kleiner sein muß, sowohl als S als auch als s und gewiß auch kleiner als S + s, so gilt blos das — Zeichen; daher $x = S + s - \sqrt{2Ss}$.

IV. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe = h und die Hypothenuse = a gegeben. — Keine der Katheten kann direct aus der Hypothenuse und der Höhe gefunden werden, wir führen also beide zugleich als Unbekannte ein und haben die beiden Gleichungen:

$$y z = a h,$$
$$y^2 + z^2 = a^2,$$

aus beiden entsteht:

$$y^2 + z^2 + 2yz = a^2 + 2ah;$$

und: $y + z = \sqrt{a^2 + 2ah},$

also aus Summe und Product:

$$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 + 2ah - 4ah}}{2},$$

oder: $\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah}}{2};$

das eine Zeichen (+) gehört der einen Kathete (y), das andere (—) der andern Kathete (z) an.

V. In einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die Differenz der beiden Katheten = d und die Höhe = h:

$$y - z = d,$$
$$y\,z = hx,$$
$$y^2 + z^2 = x^2,$$

aus der zweiten und dritten Gleichung entsteht:

$$y^2 - 2yz + z^2 = x^2 - 2hx,$$

also mit Hülfe der ersten:

$$x^2 - 2hx = d^2 \text{ rc.}$$

VI. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Umfang = p und die Höhe = h gegeben.

$$x + y + z = p,$$
$$x^2 = y^2 + z^2,$$
$$x\,h = y\,z.$$

$y + z$ aus der ersten Gleichung $= p - x$,

aus den beiden letzten $= \sqrt{x^2 + 2xh}$,

also: $(p-x)^2 = x^2 + 2xh$ rc.

VII. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Umfang = p und der Flächeninhalt = f gegeben.

$$x + y + z = p,$$
$$x^2 = y^2 + z^2,$$
$$y\,z = 2f,$$

analog VI. ist: $(y+z)^2 = x^2 + 4f = (p-x)^2$ rc.

VIII. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = r und die Hypothenuse = a gegeben.

Aus Fig. (11) geht leicht hervor, daß $y - r$ und $z - r$ gleich den beiden Stücken der Hypothenuse, also:

$$y + z = 2r + a \text{ *)};$$

hierzu noch: $y^2 + z^2 = a^2$,

so entsteht: $2yz = 4ar + 4r^2$ rc.

IX. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt = f gegeben und man weiß, daß ein Segment der Hypothenuse der ihn nicht anliegenden Kathete gleich ist.

$$y\,z = 2f,$$

$y = v$ sind die durch die Aufgabe gebotenen

Gleichungen. $y^2 + z^2 = x^2$

und $z^2 = v\,x$

---

*) Da $a = 2R$, der Durchmesser des umschriebenen Kreises, so folgt hieraus, daß im rechtwinkligen Dreieck die Summe der beiden Katheten gleich ist der Summe der beiden Durchmesser des ein- und umschriebenen Kreises.

kommen noch hinzu, um die Gleichungen in gehöriger Anzahl zu haben. Die letzte wird: $z^2 = yx$

und gibt: $x = \frac{z^2}{y}$, was in die dritte substituirt:

$$y^4 + z^2y^2 = z^4$$

liefert; eliminirt man zwischen der ersten und dieser z, so entsteht

$$y^8 + 4f^2y^4 - 16f^4 = 0 \text{ 2c.}$$

X. In einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben der Flächeninhalt $= f$ und zwei Seiten a und c.

Man hat für den Flächeninhalt die Formel:

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Suchen wir die dritte Seite $b = y$ und gehen in der Formel auf die Bedeutung von s zurück, so ist:

$$f^2 = \frac{(a+c+y)(a+c-y)(a+y-c)(y+c-a)}{16},$$

oder:

$$16f^2 = [(a+c)^2 - y^2][y^2 - (a-c)^2],$$

$$16f^2 = -y^4 + y^2[(a+c)^2 + (a-c)^2] - (a^2-c^2)^2,$$

$$y^4 - 2(a^2+c^2)y^2 + 16f^2 + (a^2-c^2)^2 = 0,$$

$$y = \sqrt{a^2+c^2 \pm \sqrt{(a^2+c^2)^2 - (a^2-c^2)^2 - 16f^2}},$$

$$y = \sqrt{a^2+c^2 \pm \sqrt{4a^2c^2 - 16f^2}}.$$

Hier darf 2f nicht größer als ac sein, weil sonst die Werthe von y imaginär würden.

XI. In einem schiefwinkligen Dreieck ist gegeben die Differenz der Quadrate der durch eine Höhe entstehenden Segmente einer Seite $= d^2$, die Summe der Quadrate der andern Seiten $= s^2$ und der Flächeninhalt $= f$.

Zwei Gleichungen, die direct aus der Aufgabe folgen, sind:

$$x^2 + z^2 = s^2,$$

und $v^2 - w^2 = d^2$;

da aber $v^2 - w^2 = x^2 - z^2$,

so ist auch $x^2 - z^2 = d^2$.

Man hat also zwei Gleichungen (die erste und letzte), aus welchen x und z unmittelbar folgen. Erst um noch y zu erhalten, benützt man den gegebenen Flächeninhalt und hat dann, da x und z bekannt sind, die Aufgabe X.

XII. In einem schiefwinkligen Dreieck ist gegeben: eine Seite $= b$, die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten $= s^2$ und der Flächeninhalt $= f$.

Die Aufgabe ergibt zunächst die Gleichung:

$$x^2 + z^2 = s^2;$$

außerdem ergibt der Gang der Aufgabe X.:

$$y^2 = \sqrt{(a^2 + c^2)^2 + 16f^2} - 2ac,$$

was hier zu $\quad 2xz = \sqrt{s^2 + 16f^2 - b^2}$

umgestaltet wird, so daß das Product der unbekannten Seiten und die Summe ihrer Quadrate bekannt ist; die weitere Rechnung ist dann einfach.

Zweites Kapitel.

Bedeutung der Zeichen in der algebraischen Geometrie.

§. 13. **Negative Werthe der Linien.** Wir haben in §. 4 gesehen, daß nach Formel (11) der Werth des Segmentes n der Seite b, je nachdem der Winkel A ein spitzer oder stumpfer, sich als positiv oder negativ herausstellt. Bei dem Ideengang des §. 4 gab uns dies zu keiner weitern Betrachtung Veranlassung; wenn man jedoch in der Figur (12) den Winkel A nach und nach von Werthen, die kleiner als 90°, durch 90° zu solchen, die größer als 90° sind, übergehen läßt, und die Aenderungen in Größe und Lage des n betrachtet, so wird man geneigt sein, die Werthe des n, welche zum stumpfen Winkel A gehören, als wirklich negative Linien anzusehen. Die Werthe CAB und CAB′ des Winkels A sind kleiner als 90°, aber man sieht schon aus ihnen, daß mit dem Wachsen des Winkels A der Werth n = DA bis D′A abnimmt, und daß für einen Werth von A, der sehr nahe an 90° ist, n sehr klein sein wird; für A = CAB″ = 90 ist n unleugbar = 0. Wenn nun der Winkel A fortfährt zuzunehmen, so wird n fortfahren abzunehmen, d. h. negative Werthe, die wir unter 0 setzen, annehmen; so daß für CAB‴ > 90° AD‴ = n als ein negativer Linienwerth angesehen werden kann, rechtsliegend von A, im Gegensatz zu den andern positiven, die links liegen.

Einen ähnlichen, doch in gewisser Hinsicht verschiedenen Fall haben wir in der Aufgabe: Den Schnittpunkt der an zwei Kreisen gemeinschaftlichen Tangente [wie AB, Fig. (13)] mit der Centrallinie zu suchen.

Sind R und r die Radien, c die Centrallinie und x der Abstand des gesuchten Schnittpunktes von dem Mittelpunkt des rechts liegenden Kreises, so geben die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke BAC und AB'C':

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{c+x} \text{ oder: } \frac{x}{c} = \frac{r}{R-r} \text{ und } x = \frac{rc}{R-r}.$$

Läßt man nun r, was bisher kleiner als R vorausgesetzt wurde, wachsen, so wird der Nenner R — r dann kleiner, der Bruch und x also immer größer, und der Schnittpunkt rückt immer mehr rechts, bis für R = r der Nenner = 0, x also unendlich groß und die gemeinschaftliche Tangente der Centrallinie parallel ist. Wird nun r noch größer, also größer als R, so wird der Nenner R — r negativ, mithin auch x, wobei die wirkliche Länge desselben bei weiterem Wachsen von r immer kleiner wird, aber nunmehr links (statt vorher rechts) aufgetragen werden muß. Es ist also x aus dem Positiven durch das Unendliche in das Negative übergegangen.

§. 14. **Directe und indirecte Figuren.** Man nennt solche Figuren, die wie die Dreiecke ABC und AB'''C Fig. (12) im Uebrigen gleichartig, nur in Bezug auf die Lage einer oder einiger Linien entgegengesetzt sind, in Bezug auf diese Linien indirect, während man Figuren, wie die Dreiecke ABC und AB'C direct nennt*).

Besteht allgemein zwischen den Stücken a, b, c, d ...... x einer Figur eine Gleichung, so besteht sie auch ebenso für jede mit dieser directen Figur, für die aber mit ihr indirecten wird eine Größe, z. B. x die vorher = a — b war, gleich b — a werden, also mit einem anderen Zeichen vorkommen. Man kann sich bei solchen indirecten Figuren immer jene obige Gleichung der Art vorstellen, daß sie für beide Fälle dieselbe, nur daß das x in der einen als positive, in der andern als negative Größe erscheint, und kann in dieser Weise von den Formeln 10 und 10ª die erstere als allgemeine gelten lassen, indem man n für den Fall des spitzen Winkels A als positiv, für den Fall des stumpfen als negativ ansieht. Aehnlich gilt in dem letzten Beispiel der Ausdruck $x = \frac{cr}{R-r}$ für allgemein, und das positive oder negative Zeichen von x gibt nur an, ob der Schnittpunkt rechts oder links der Kreise liegt.

§. 15. **Das Erkennen der indirecten Stücke in indirecten Figuren und die Auslegung der negativen Werthe.** Die aus dem Positiven in's Negative übergehenden indirecten Stücke indirecter

*) Diese von Carnot herrührende Theorie ist seiner Geometrie der Stellung (deutsch von H. Schuhmacher) entwickelt.

Figuren müssen, da die Aenderung ihrer Werthe nicht sprungweise, sondern allmählich (continuirlich) stattfindet, im Positiven immer mehr und mehr abnehmen können, auf Null kommen, um dann negativ zu werden; oder immer mehr und mehr zunehmen, auf Unendlich kommen *) und dann ins Negative übergehen. Wir dürfen dies Null- oder Unendlichwerdenkönnen einer Größe als Anzeige nehmen, daß sie ihr Zeichen ändern, daß sie also indirect werden kann, und wollen uns demgemäß bei Rechnungen vorsehen, um sie in jedem Fall mit ihren entsprechenden Zeichen auftreten zu lassen. Erhält man umgekehrt bei dem Ausführen der Zahlenrechnung für irgend eine Größe, die bei Entwickelung der Formel für positiv vorausgesetzt wurde, einen negativen Werth, so ist dies meist ein Zeichen, daß die Größe indirect ist; man muß dann, entsprechend dem Obigen, die Auslegung dieser Werthe vornehmen. Weiteres mögen die speciellen Beispiele erläutern.

§. 16. Beispiele.

I. Von einem gegebenen Dreieck ABC (Fig. 14) mittelst einer durch einen bestimmten Punkt D gegen die Schenkel des Winkels A gezogenen Graden ein Dreieck AEF, dessen Flächeninhalt zu dem von ABC im Verhältniß von q zu 1 steht, abzuschneiden; also $\frac{AEF}{ABC} = q$. Ist nun AE = x und AF = y, und sind die Seiten des Dreiecks ABC wie gewöhnlich benannt, so entsteht:

$$\frac{AEF}{ABC} = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC}{}^{**)} = \frac{xy}{bc}; \text{ also: } \frac{xy}{bc} = q \text{ oder } xy = bcq.$$

Die Lage des Punktes D, welcher ein bestimmter sein muß, sei nun dadurch gegeben, daß man die Seite BA über A hinaus verlängert, bis sie von der durch D mit AC parallel gezogenen Linie DG getroffen wird; wenn dann AG = e und GD = d, so hat man:

$$\frac{d}{x} = \frac{e+y}{y} \text{ oder } \frac{d-x}{x} = \frac{e}{y}; \; y = \frac{ex}{d-x};$$

dies oben substituirt gibt: $\frac{ex^2}{d-x} = bcq$,

oder: $$ex^2 - bcq\,(d-x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A).$$

---

*) Man kann sich für diesen Uebergang von Positionen durch das Unendliche in's Negative keine so klare und einfache Vorstellung machen, wie man für den entsprechenden Uebergang durch die Null gewohnt ist; das obige algebraisch-geometrische Beispiel zeigt übrigens die Möglichkeit eines solchen Ueberganges.

**) Flächeninhalte solcher Dreiecke, welche einen Winkel gleich haben.

Um nun zu sehen, ob es zu dieser Figur eine indirecte gibt und weiter dabei zu wissen, welche Größe in der Formel das Zeichen wechselt, sehen wir zu, welche derselben Null oder Unendlich werden kann. Aendern wir die Lage des Punktes D auf der Linie DF, so wird, wenn D dem E nahe rückt, e immer kleiner und kleiner, bis für D in E, e = 0 ist; sobald nun D seine Lage innerhalb des Dreiecks ABC angenommen hat, ist e′ gegen die frühere Lage indirect (sowie die ganze Figur gegen die erste), also ist für diesen Fall die Formel (A) zu:

$$e'x^2 + bcq\,(d - x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

geworden, indem zuerst das Zeichen e und dann die der ganzen Gleichung gewechselt wurden. Bewegt sich der Punkt D′ noch weiter, so nimmt nun d ab, bis es für D′ in F gleich 0 wird. Erhält dann weiter D′ eine Lage wie D″, so ist auch d′ gegen das frühere d indirect, wechselt also in der Formel (B) das Zeichen. Es wird daher dieselbe zu:

$$e''x^2 - bcq\,(d' + x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C).$$

Gegen die ursprüngliche Figur ist nun d und e indirect.

Betrachten wir endlich x, so können wir auch dies sich ändern lassen, indem es mit dem q kleiner wird, sowie Punkt E sich gegen A bewegt; für E in A ist x = 0 (q = 0), für E aber in E′ ist x gegen das frühere indirect, während die Fläche AE′F′ dieselbe Größe wie AEF hat. Wenn also der Inhalt an den verlängerten Schenkeln des Winkels A abgeschnitten werden soll, ist x′ indirect und die Gleichung wird:

$$ex'^2 - bcq\,(d + x') = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D)\,^{*}).$$

Hätten wir die Gleichung (A) in Bezug auf x gelöst, so würde:

$$x = \frac{-bcq \pm \sqrt{b^2c^2q^2 + 4bcdeq}}{2e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

entstanden sein.

Das + Zeichen der Wurzelgröße gibt eine positive Lösung x = AE, während die negative Lösung (aus dem negativen Zeichen der Wurzelgröße) durch die indirecte Lage wie x′ erklärt wird; es zeigt dies die Lösung der Gleichung (D), die

$$x' = \frac{bcq \pm \sqrt{b^2c^2q^2 + 4bcdeq}}{2e}$$

gibt; indem hier der positive Werth mit jenem negativen der Gleichung (E) und umgekehrt, identisch. — Man kann also hier sagen, daß die Gleichung (A) für alle möglichen Fälle richtig, wenn in ihr nur die Größen nicht allein mit dem gehörigen Werthe, sondern auch mit den

---

*) Es versteht sich von selbst, daß man die Gleichungen (B), (C) und (D) aus den entsprechenden Figuren analog der Gleichung (A) hätte unmittelbar finden können.

entsprechenden Zeichen erscheinen; in dem negativ erscheinenden Werth der Unbekannten setzt man $x = -x'$, wodurch x' positiv wird und direct gelegen ist.

II. Von dem Endpunkt O eines Durchmessers Fig. (15) soll nach einer auf demselben senkrechten Graden BC eine Linie OD der Art gezogen werden, daß das zwischen der Graden BC und der Peripherie enthaltene Stück DE eine gegebene Länge m habe. Ist nun $BC = a$, $BO = b$, $OD = x$ und $BD = y$, so wird nach dem Satz über Producte der Sehnenstücke: $OD \times DE = FD \times DC$ sein:

$$mx = (a + y)(a - y) = a^2 - y^2,\text{ und } y^2 = x^2 - b^2,\text{ also:}$$

$$mx = a^2 + b^2 - x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

$$\text{und } x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + a^2 + b^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B).$$

Die positive Lösung ist einfach, wollte man aber die negative dadurch auslegen, daß man x mit $-x'$ vertauscht, so erhielte das x' eine Lage, die unmöglich eine Lösung sein kann; gehen wir aber auf die Gleichung (A) zurück, so sehen wir, daß m Null und in D'E' negativ werden kann, also durch sein Zeichenwechseln auch ein Zeichenwechseln des Gliedes in x, wenn die Gleichung (A) richtig bleiben soll, mit sich führt, daß also die negative Lösung der als allgemein betrachteten Gleichung dem negativen m angehört und durch dies positiv wird; denn m in $-m$ übergeführt, gibt:

$$\text{und } x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + a^2 + b^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C);$$

wo wieder die positive Lösung jener negativen in (B) und umgekehrt gleich ist. Man hat also immer Obacht zu geben, wenn eine Größe, die mit den Unbekannten verbunden ist, indirect werden kann, daß man die negativen Werthe derselben richtig auslegt. Hier ist für x in beiden Fällen ein positiver Werth gemeint.

Uebrigens läßt die Aufgabe auch links von BO zwei Lösungen zu; so daß also, was die Anzahl der Lösungen anlangt, der Grad der Gleichung nicht als völlig maßgebend erscheint. Hätte man aber statt $OE = x$ die Größe $BD = y$, die wirklich indirect werden kann, als Unbekannte gesucht, so hätte man alle vier Werthe in einer Lösung und die indirecten hätten Bedeutung gehabt. Es entsteht nämlich dann aus den beiden anfänglichen Gleichungen, zuerst:

$$m\sqrt{b^2 + y^2} = a^2 - y^2,$$

$$\text{oder: } y^4 - y^2(m^2 - 2a^2) + a^4 - b^2m^2 = 0$$

$$\text{und: } y = \pm\sqrt{\frac{m}{2} + a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{m^2}{2} + a^2\right)^2 - (a^4 - b^2m^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (D)},$$

$$\text{oder: } y = \pm\sqrt{\frac{m^2}{2} + a^2 \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} + m^2(a^2 + b^2)}}.$$

Die innere Wurzelgröße ist also stets reell und nach der Form (D), (da $a^2 = b \cdot BG$ und $BG > m$, also $a^2 > bm$ und $a^4 > b^2m^2$ ist) auch kleiner als $\frac{m^2}{2} + a^2$. Da aber dieses letztere vor der inneren Wurzel stehende Glied immer positiv ist, so sind sämmtliche vier Wurzeln reell. Weil hier für das indirecte m der Ausdruck (der nur m^2 enthält) derselbe bleibt, sind sämmtliche Lösungen in dem einen Ausdruck enthalten.

III. Man soll auf der unbegrenzten Linie AB (Fig. 16) den Punkt C finden, dessen Abstände x und y von den beiden Punkten D und E derselben Graden ein Produkt $= m^2$ bilden, während $DE = a$ gegeben ist.

Man hat also:

$$x + y = a \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (A)},$$

$$\text{und: } \quad x\,y = m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (B)},$$

$$\text{daher: } \quad x\,(a - x) = m^2$$

$$\text{und: } \quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (C)}.$$

Die beiden Werthe, welche immer reell, sind leicht zu übersehen. Wollte man jedoch hier in der Endgleichung bemerken, daß x indirect sein könne und $-x' = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}$ setzen, so wäre dies Unrecht, da x nur in der Gleichung (A) als indirect erscheinen kann, nicht aber in (B), die das Product xy enthält. — Aus dem negativen x in (A) entsteht:

$$y = a + x,$$

und mit Hülfe des unveränderten (B):

$$x\,(a + x) = m^2,$$

$$\text{oder: } \quad x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + m^2} \quad \ldots\ldots \text{ (D)}.$$

Wir bemerken hier folgendes: wenn in (C) $m^2 > \frac{a^2}{4}$ ist, wird x unmöglich, während es in (D) für alle Fälle möglich bleibt; man

weiß also nach (D), daß, im Falle der Werth von x aus (C) imaginär wird, dasselbe indirect zu nehmen ist, während es für $m^2 < \frac{a^2}{4}$ direct und indirect genommen werden kann. Es gibt also für $m^2 > \frac{a^2}{4}$ zwei und für $m^2 < \frac{a^2}{4}$ vier Lösungen.

Ist die Aufgabe statt der obigen allgemeinen Form so gefaßt, daß die Linie DE = a in zwei derartige Theile x und y getheilt werden soll, so ist dieselbe sobald $m^2 > \frac{a^2}{4}$ unmöglich.

Man ersieht aus dieser Aufgabe, daß nicht alle Gleichungen, die aus Figuren, zu welchen indirecte bestehen, erhalten wurden, auf die oben berichtete Art verwandelt werden dürfen.. Eine Ausnahme der Art hat allemal statt, wenn in der Aufgabe die Größen, welche indirect werden können, auch in der Weise vorkommen, daß auf ihre Lage keine Rücksicht genommen werden kann; wie z. B. bei gewissen nicht geometrischen Bedingungen der Aufgabe (Producten, Verhältnissen, Quadraten ꝛc.) der Fall ist.

Drittes Kapitel.

Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke zwischen Linien und Flächen.

§. 17. **Geometrische Construction einiger einfachen Formen.** Es ist manchmal von Interesse aus den durch algebraische Lösung einer geometrischen Aufgabe erhaltenen Endausdrücken, nachdem die darin vorkommenden bekannten Linien und Flächen bestimmte Werthe erhalten haben, nicht durch Zahlenrechnung, sondern durch constructive Operationen die Unbekannten zu ermitteln. Man belegt ein solches Verfahren mit der Bezeichnung: „Construction von Gleichungen.“

Die Grundlage solcher Constructionen für zusammengesetzte Gleichungen sind folgende fünf einfachere:

1) $x = \frac{a\,b}{c}$,

2) $x = \frac{b^2}{a}$,

$$3)\quad x = \sqrt{a\,b},$$

$$4)\quad x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$5)\quad x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Zu 1) Die Construction von $x = \frac{ab}{c}$ ist sehr leicht, denn x ist die vierte Proportionale zwischen a, b und c, oder: $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$. Man trägt auf zwei sich in einem Punkte treffende Linien AB und AC (Fig. 17) die Werthe c und b von A aus den einen auf AC, den andern auf AB als AC′ und AB′ auf und verbindet die beiden Endpunkte B′ und C′; wird dann a noch auf AC als AC″ getragen und durch den Endpunkt C″ desselben eine Parallele zu B′C′ gezogen, so ist das entstehende Stück von AB nämlich AB″=x. Man findet auch die vierte Propotionale durch den Satz: Schneiden sich zwei Sehnen in einem Kreise, so ist das Product der Stücke der einen gleich dem Product der Stücke der andern. Trägt man nämlich in einen beliebigen Kreis (Fig. 18) eine Sehne AB von der Länge a + b, schneidet von dem Punkte C, wo a und b zusammenstoßen, mit c in die Peripherie in D ein und zieht nach diesem Punkt die Linie CD, so gibt deren Verlängerung bis E das x = CE.

Zu 2) Zur Construction von $x = \frac{b^2}{a}$, wo x die dritte Proportionale ist, hat man entweder denselben Weg wie zur vierten, oder der Satz: eine Kathete ist mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypothenuse und dem anliegenden Segment. Wenn a > b, construirt man aus a als Hypothenuse BC und b als Kathete AC ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 19) und fällt die Höhe AD; das so entstehende an b anliegende Segment CD der Hypothenuse ist gleich x. Ist aber b > a, so construirt man das rechtwinklige Dreieck ABD Fig. (19) mit b als Hypothenuse AB und mit a als Kathete BD, errichtet man dann am Endpunkt A dieser Hypothenuse eine Senkrechte AC, so ist die Länge BC dann = x. Ferner kann hier auch der Satz: Die Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck ist mittlere Proportionale zwischen den Segmenten der Hypothenuse, zur Construction dienen. Fig. (19) ist dann BD = a, AD = b und DC = x. Ebenso auch der Satz: Gehen eine Tangente und eine Secante von einem Punkt aus, so ist das Stück der Tangente von diesem Punkt bis zum Berührungspunkt

mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken der Secante, die zwischen dem Punkt und den Peripheriepunkten liegen Fig. (20). AB $=$ b, BC oder BD $=$ a und BD oder BC $=$ x. Beide Sätze geben die Construction für b $\gtrless$ a.

Zu 3) Die Construction der mittleren Proportionalen ist schon im Vorigen enthalten.

Zu 4) Die Construction von $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ geschieht durch das rechtwinklige Dreieck; wenn a und b Katheten, so ist x die Hypothenuse.

Zu 5) Für $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist a die Hypothenuse und b und x die beiden Katheten. Man kann auch $a^2 - b^2$ zerlegen und hat: $x = \sqrt{(a+b)(a-b)}$; man construirt dann x als mittlere Proportionale. —

§. 18. **Construction einiger zusammengesetzten Gleichungsformen.** Es ist nun nöthig zu zeigen, auf welche Weise man die obigen einfachen Formen benützt, um complicirtere damit zu construiren.

1) Die Gleichung $x = \frac{abc}{de}$ zu construiren, setze man $\frac{ab}{d} = y$ und construire dies nach (1) §. 17. und dann $x = \frac{cy}{e}$ ebenso. Aehnlich jede derartige Gleichung; so z. B.:

$$x = \frac{abcd}{efg} \text{ durch } \frac{ab}{e} = y; \ \frac{cy}{f} = z; \ \frac{dz}{g} = x.$$

Auf diese Art kann man auch $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ construiren, wenn man es $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$ schreibt.

2) Gleichungen von der Form $x = \frac{abc}{de} + \frac{fg}{h} - \frac{iklm}{opq}$ construirt man nach den obigen Methoden Glied für Glied und fügt dann die erhaltenen linearen Werthe, je nach den Zeichen addirt oder subtrahirt, zusammen.

3) Für $x = \sqrt{\frac{abcd}{ef}}$ hat man $\frac{ab}{e} = y$; $\frac{cy}{f} = z$ und $x = \sqrt{dz}$.

4) Um $x = \sqrt{ab \pm cd}$ zu construiren, findet man $ab = y^2$ und $cd = z^2$, woraus: $x = \sqrt{y^2 \pm z^2}$ 2c. Die specielle Form $x = \sqrt{ab + bc}$, die mit $x = \sqrt{(a+c)b}$ gleichbedeutend, ist noch leichter.

5) Für $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$ ist $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $z = \sqrt{c^2 - d^2}$, also $x = \sqrt{y^2 + z^2}$.

6) Für $x = \sqrt{ab + cd - \frac{efg}{h}}$ ist $ab = y^2$; $cd = z^2$; $y^2 + z^2 = v^2$; $\frac{efg}{h} = w^2$ und $x = \sqrt{v^2 - w^2}$.

7) Brüche wie $x = \frac{abc + def}{gh + ik}$ zu construiren, sucht man nach (4) $y = \sqrt{gh + ik}$ und hat $x = \frac{abc}{y^2} + \frac{def}{y^2}$, was dann nach (2) construirt werden kann; man mag auch $gh + ik = gy$ setzen und hat dann $y = h + \frac{ik}{g}$ und weiter $x = \frac{abc}{gy} + \frac{def}{gy}$.

8) Aus $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$ folgt $x = \frac{ab}{c}\left(\frac{c^2 - ab}{ab + c^2}\right)$ und $= \frac{ab}{c} \cdot \frac{c - \frac{ab}{c}}{\frac{ab}{c} + c}$; sobald also $\frac{ab}{c} = y$ erhalten ist, wird $x = y \cdot \frac{c - y}{c + y}$.

9) $x = \sqrt[4]{a^2bc + a^3d - d^2e^2}$ kann man in:

$$x = \sqrt{a \cdot \sqrt{bc + ad - \frac{d^2e^2}{a^2}}}$$

verwandeln, construirt man nun: $y = \sqrt{bc + ad - \frac{d^2e^2}{a^2}}$ nach dem Vorhergehenden, so folgt dann leicht: $x = \sqrt{ay}$.

Gleichungen wie $x = \sqrt[3]{abc}$ und ähnliche sind mit Hülfe der Elementargeometrie nicht zu construiren.

Es erfordert natürlich einigen Takt und Geschicklichkeit, um jeder Gleichung sogleich die Form zu geben, in welcher sie am leichtesten construirt werden kann. Die obigen Beispiele mögen jedoch hier genügen.

Um Werthe des x, die zwei Dimensionen haben, zu construiren, bringt man die algebraischen Ausdrücke auf die Form $x = B \cdot H$; es ist alsdann B die Basis und H die Höhe des Rechtecks, dessen Fläche $= x$. So ist z. B. die Gleichung: $x = \sqrt{cd(a^2 - b^2)}$, x eine Fläche; sucht man $\sqrt{cd} = B$ und $\sqrt{a^2 - b^2} = H$, so ist $x = B \cdot H$ bekannt. Dieses Rechteck läßt sich dann durch einfache Construction in jede beliebige andere Figur verwandeln.

Analog wird man den algebraischen Ausdruck für jeden Werth x von drei Dimensionen auf die Form $x = G \cdot H$ zu bringen suchen, wo x ein rechtwinkliges Parallelepiped von der Grundfläche G und der Höhe H; G ist hier von zwei Dimensionen, gleich b h. Es ist also der Werth von x auf die Form b h H zu bringen, damit das Volumen bekannt sei.

§. 19. **Construction der Werthe der Unbekannten aus Gleichungen des zweiten Grades.** Die Construction der Gleichung:

$$x^2 + px \pm q = 0,$$

wo q immer > 0, geht nach dem Vorhergehenden leicht folgendermaßen vor sich:

Zuerst ist zu bemerken, daß, wenn x und p Linien sind, q eine Fläche bedeuten muß; setzen wir deshalb $q = m^2$, d. h. betrachten wir die Fläche als ein Quadrat, so kann dessen Seite m als bekannt gelten. Man kann nun die Gleichung auflösen und hat den Ausdruck:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \mp m^2}$$

zu construiren, was sehr einfach ist, indem, wenn das Zeichen von q das negative, $\frac{p}{2}$ und m die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks abgeben, und wenn das Zeichen von q positiv, $\frac{p}{2}$ als Hypothenuse und m als Kathete erscheint.

Man kann aber auch die verschiedenen Fälle dieser Gleichungsform:

1) $x^2 - px = - m^2$,
2) $x^2 - px = + m^2$,
3) $x^2 + px = - m^2$,
4) $x^2 + px = + m^2$,

auf andere Weise construiren. — Zuerst ist zu bedenken, daß die Form (1) in (3) und die Form (2) in (4) und umgekehrt übergeht, sobald x in — x verwandelt wird; man hat also nur für die vier Formen alle die positiven Wurzeln zu construiren, um auch alle die negativen zu haben. —

Im Fall (1) geht die Gleichung in:

$$x (p - x) = m^2 \text{ über,}$$

und dies kann dadurch construirt werden, daß man in einem Kreis dessen Durchmesser $= p$ eine Ordinate von der Länge m einträgt (Fig. 21); die beiden Abschnitte des Durchmessers sind dann x und $(p - x)$. Da aber m zweimal auf diese Weise eingetragen werden kann, so hat

man zwei Lösungen. Die Stücke sind nämlich $AB = x_1$ und $BD = p - x_1$ und dann $AC = x_2$ und $CD = p - x_2$; da aber $x_1 + x_2 = p$ sein muß, so ist $p - x_1 = x_2$ und es ergeben sich beide Lösungen als die beiden Stücke des Durchmessers bei einem einzigen Eintragen von m. In diesem Falle (1) sind beide Wurzeln positiv. — Sobald hier m größer als $\frac{p}{2}$, ist die Construction so wie der Werth x selbst unmöglich.

Der entsprechende Fall (3) hat lauter negative Wurzeln, deren Werthe man aus (1), wenn das x mit — x vertauscht wird, erhält.

Im Falle (2) geht die Gleichung in:

$$x\,(x - p) = m^2 \text{ über,}$$

und man hat an einen Punkt A eines beliebigen Kreises die Tangente AB von der Länge m Fig. (20) anzutragen und von dem Endpunkt B derselben eine Secante zu ziehen, deren in den Kreis fallendes Sehnenstück CD die Länge p hat *). Diese Secante von B bis zu ihrem zweiten Schnittpunkt D mit dem Kreise ist dann x; es ist dies die einzige positive Wurzel, welche die Gleichung (2) hat.

Im Falle (4) entsteht:

$$x\,(x + p) = m^2.$$

Eine ähnliche Construction wie für die Gleichung (2) liefert hier das x, nur ist es hier Fig. (20) das Stück der Secante, was von B bis zum ersten Schnittpunkt C mit dem Kreise geht; es dies auch hier die einzige positive Wurzel der Gleichung.

§. 20. **Harmonische Verhältnisse und Theilungen.** Hat man zu den beiden Graden a und c eine dritte b, welche mit ihnen eine harmonische Proportion der Art bildet, daß:

$$\frac{a - b}{b - c} = \frac{a}{c} \text{ ist,}$$

so heißt b das harmonische Mittel zwischen a und c.

Man gibt auch der harmonischen Proportion die Formen:

$$b = \frac{2ac}{a + c}, \text{ oder: } \frac{b}{a} = \frac{c}{\frac{a + c}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$\text{und: } \frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B);$$

es ist also b nach (A) die vierte Proportionale zu a, c und dem arith-

---

*) Hierbei ist es, wie bekannt, eine Erleichterung, wenn man den sonst willkürlichen Durchmesser des Kreises = p macht.

metischen Mittel zwischen a und c und nach (B) die Reciproce von b das arithmetische Mittel derer von a und c.

Trägt man nun die obigen Linien Fig. (22) der Art auf die größere Linie a gleich AB, daß die kleineren c und b an einem Endpunkt B derselben resp. gleich CB und DB zu liegen kommen, so sagt man, die vier Punkte A, B, C und D seien harmonisch liegende Punkte und die Linie AB sei durch die Punkte C und D harmonisch getheilt. Die Proportion, welche zwischen den Linien AB, CA, AD und CD stattfindet, ist nach dem Obigen, da $a - b = AD$; $b - c = DC$ ist:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \text{ und daraus:}$$

$$AB \times DC = AD \times BC,$$

d. h. das Rechteck construirt aus der ganzen Linie und dem mittleren Stück ist gleich dem Rechteck construirt aus den beiden äußeren Stücken.

Man kann nun verschiedene Constructionsaufgaben solcher Art formiren, daß drei der harmonisch liegenden Punkte gegeben sind und der vierte gesucht werden soll.

1) Sind A, D und C gegeben und B gesucht; so setzt man die Länge BC (welche dem a und b zugleich angehört) $= x$ und hat:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AC + x}{x} \text{ und hieraus:} \quad x = \frac{AC \cdot CD}{AD - CD},$$

was ebenfalls leicht zu construiren.

Man kann auch die erste Proportion, wie leicht einzusehen, direct construiren, wenn man durch die Punkte A und C Fig. (22) in beliebiger Richtung zwei unter sich parallele Linien zieht und auf denselben resp. die Längen $AD = AD'$ und $CD = CD''$ aufträgt und eine Grade durch $D'D''$ bis B zieht. CB ist dann $= x$. — Man kann auch drittens die obige Proportion erst auf die Form:

$$\frac{AD - CD}{CD} = \frac{AC}{x}$$

bringen und dann construiren.

2) Es seien die Punkte A, D und B gegeben und C zu finden. Es bleibt hier, wie unter (1) $BC = x$ und man hat:

$$\frac{AD}{BD - x} = \frac{AB}{x};$$

durch Lösung entsteht: $\quad x = \dfrac{AB \times BD}{AD + AB},$

was wieder leicht zu construiren.

Man kann auch hier die Proportion direct construiren. Wenn man weiß, daß die beiden Linien BE und DE in dem Dreieck AEC Fig. (23), welche den Innen- und Außenwinkel bei E halbiren, die Seite AC (resp. deren Verlängerung) so treffen, daß die vier Punkte A, B, C und D harmonisch liegen*); da überdies der Winkel DEB immer ein rechter, so zieht man über BD einen Halbkreis, nimmt auf ihm beliebig den Punkt E an und macht dann den Winkel DEC gleich dem hiernach bekannten Winkel AED. — Aehnlich wird man bei den übrigen Fällen verfahren.

Wir begnügen uns hiermit die in der Neuzeit so reichhaltig gewordene Lehre von den harmonischen Verhältnissen in der Geometrie erwähnt zu haben.

§. 21. **Lösung von Aufgaben durch algebraische Rechnung und nachfolgende geometrische Constructionen.** Man kann jedesmal auf die algebraische Lösung irgend jeder geometrischen Aufgabe die Construction der Gleichung folgen lassen; wir wollen jedoch hier nur einige Fälle betrachten, wo die unmittelbare Construction der Aufgabe schwierig, dieselbe aber durch die aus der Aufgabe angesetzten Gleichungen und deren algebraische Verwandlung, leichter bewerkstelligt wird.

I. Eine grade Linie von der Länge a nach dem äußeren und mittleren Verhältniß zu theilen, d. h. den Theil x von a zu suchen welcher der Proportion: $\frac{a - x}{x} = \frac{x}{a}$ Genüge thut. — Man kann diese Gleichung nicht unmittelbar construiren, die Auflösung aber gibt:

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \text{ und}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Man construirt $y = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ und $x = y - \frac{a}{2}$. Die negative Wurzel dieser Gleichung erhält man durch Construction des Werthes:

$$x' = -x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Dieselbe thut jedoch nicht der vorgelegten Aufgabe, sondern der wo x eine Verlängerung von a ist $(a + x) : x = x : a$, Genüge.

---

*) Bekanntlich findet statt in Fig. (22): $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{CD}$; ähnlich wird erhalten $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$; aus beiden: $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$.

Man kann hier durch einfache Verwandlung der ursprünglichen Gleichung $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$ die Construction ermöglichen; es entsteht nämlich aus ihr durch Anwendung eines Verwandlungssatzes der Proportionen: $\frac{a}{x} = \frac{x+a}{a}$, oder: $x(x+a) = a^2$, woraus x nach §. 19 (4) leicht erhalten wird.

II. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, in dem die Kathete = b und das Segment n der Hypothenuse, das dieser Kathete nicht anliegt, gegeben. Das Dreieck ist nicht direct zu construiren; sucht man aber das andere Segment = x und setzt die Gleichung:

$$b^2 = n(n+x)$$

an, so ist aus dieser x leicht zu finden, (mit Hülfe der Taugente und Secante, oder nach $x = \frac{b^2}{n} - n$) und dann das Dreieck leicht construirbar.

III. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat der Art einzutragen, daß Fig. (24) die eine Seite desselben auf die eine Seite AC des Dreiecks und die beiden andern Ecken des Quadrats D und E in die beiden andern Seiten AB und BC des Dreiecks zu liegen kommen.

Nennt man hier x die Seite des Quadrats, so hat man zur Auffindung desselben nur die Grundlinie b und die Höhe h des Dreiecks nöthig; denn es ist:

$$\frac{AC}{DE} - \frac{BH}{BI} \text{ oder: } \frac{b}{x} = \frac{h}{h-x}.$$

Eine Gleichung, welche die Form $x(b+h) = bh$ annimmt und dann x leicht ergibt. Man sieht hier, da zur Bestimmung des x nur b und h mitwirkten, daß alle Dreiecke, welche dasselbe b und h haben, dasselbe x haben werden. Freilich wird aber, wenn das Dreieck einen stumpfen Winkel an der Seite AC Fig. (25) hat, ein Theil der Quadratseite auf die Verlängerung der Dreiecksseite fallen. Der Werth der Seitenlänge des Quadrats kann diese indirecte Lage eines Theils der einen Seite nicht anzeigen. Hätte man aber das Stück y = AF zwischen der Ecke des Dreiecks und der des Quadrats gesucht, so hätte man gehabt: $\frac{y}{x} = \frac{n}{h}$ und durch Substitution des obigen Werthes für x, das $y = \frac{nb}{b+h}$; y ist hier negativ, sobald der Winkel stumpf wird, wobei dann auch p negativ wird.

IV. In einem Kreise soll man durch einen Punkt C Fig. (18) eine Sehne ziehen, deren beide von C aus gezählten Stücke EC und DC sich wie m : n verhalten.

Man hat also: $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$. Um aber noch eine zweite Gleichung zwischen diesen beiden Unbekannten ansetzen zu können, zieht man eine beliebige Sehne durch C, so daß deren beide Stücke a und b (AC und BC) bekannt sind. Setzt man nun die Gleichung: $ab = xy$ an, so gibt die Elimination von y nun $x^2 = \frac{abm}{n}$, was leicht zu construiren, denn x entsteht durch Construction einer vierten und einer mittleren Proportionale. Das Eintragen in den Kreis kann auf zwei Arten geschehen, so daß zwei Sehnen entstehen die gleich sind und beide der Aufgabe entsprechen. —

Zweite Abtheilung.

Die ebene und sphärische Trigonometrie, nebst der Polygonometrie.

Erstes Kapitel.

Grundprincipien.

§. 22. **Die Stellung der Trigonometrie in der rechnenden Geometrie.** Die in der ersten Abtheilung dieses Werkes entwickelten geometrischen Formeln enthalten wohl manchen schönen Satz und mögen auch zur Ausrechnung mancher practischen Aufgabe dienen können, aber sie sind nicht einmal vermögend, die fehlenden Stücke eines Dreiecks in dem einfachsten Falle der Geometrie, wo von den sechsen drei bekannt sind, zu berechnen, weil sie alle ohne Ausnahme bekannten Winkeln keine Einwirkung auf das Resultat gestatten, noch aus bekannten Seiten unbekannte Winkel finden lehren. Für die Winkel des Dreiecks besteht zwar eine Formel, durch welche aus zweien der dritte gefunden werden kann und ebenso besteht eine für die sämmtlichen Winkel irgend eines Vielecks von bestimmter Seitenzahl; aber keine

einzige Formel der Geometrie enthält Winkel und Linien zu gleicher Zeit, so daß aus bekannten Winkeln und Seiten auf unbekannte Winkel und Seiten in der Rechnung geschlossen werden könnte. Ueberdieß spielen in allen jenen Formeln außer den Seiten noch andere Liniengrößen im Dreieck eine Rolle mit und nur eine einzige im rechtwinkligen Dreieck enthält nichts als die einfachen Grundbestimmungsstücke des Dreiecks.

Es fehlen also, wenn wir uns an jene einfachsten Fälle, nach welchen ein Dreieck durch drei seiner Stücke bestimmt ist, halten wollen, mindestens zwei Formeln; nämlich: eine, die zwei Seiten und zwei Winkel und eine, die drei Seiten und einen Winkel enthält.*) Diese beiden offenbar noch fehlenden Formeln für das allgemeine Dreieck, sowie die analogen fürs rechtwinklige und manche noch aus ihnen folgende zu entwickeln, ist nun die Aufgabe der Trigonometrie.

§. 23. **Die Grundlage der trigonometrischen Formeln.** Zur Lösung ihrer Aufgabe muß sich die Trigonometrie besonderer Hülfsmittel bedienen, da Winkel und Linien als heterogene Größen nicht direct in eine mathematische Formel gebracht werden können. — Diese besonderen Hülfsmittel findet sie in den trigonometrischen oder Winkel-Functionen, deren Grundidee wir sogleich auseinandersetzen wollen.

Wie in §. 2 besonders hervorgehoben wurde, haben alle Formeln der rechnenden Geometrie ihre Grundlage in der Proportionalität der Linien und nach dieser in der Aehnlichkeit der Dreiecke; wie weiter der Rückblick auf das vorhergehende Kapitel zeigt, existiren für das rechtwinklige Dreieck die einfachsten und brauchbarsten Formeln und die meisten bei dem schiefwinkligen Dreieck gehen aus jenen dadurch hervor, daß jedes schiefwinklige Dreieck sich in zwei rechtwinklige zerlegen läßt.

Suchen wir nun hier nach diesem Vorgang der rechnenden Geometrie vorzuschreiten, so erinnern wir uns erstens, daß beim rechtwinkligen Dreieck nur ein spitzer Winkel des einen dem entsprechenden des andern gleich zu sein braucht, um ähnliche Dreiecke und mithin Proportionen zu liefern, daß also diese Proportionen nur von einem Winkel abhängen. Wir erinnern uns weiter, daß in §. 9 eine ganze Reihe rechtwinkliger Dreiecke schon aufgezählt ist, für welche mit Hülfe

*) Da jede Formel außer den drei bekannten Stücken noch ein zu berechnendes, unbekanntes, also vier Stücke, enthalten muß, und aus drei Winkel keine Seite zu berechnen ist, so geht leicht hervor, daß nur zwei solcher Grundformeln möglich sind. —

des bekannten einen spitzigen Winkels die Kathete aus der Hypothenuse und umgekehrt, ebenso wie die Kathete aus der Kathete durch Rechnung hervorgeht. Denken wir uns die Reihe solcher Dreiecke vervollständigt und so die entsprechenden Größen für die Katheten aller rechtwinkligen Dreiecke, sie mögen mit irgend welchem beliebigen spitzen Winkel construirt sein, aus der Hypothenuse berechnet, so haben wir ein Hülfsmittel an der Hand in jedem rechtwinkligen Dreieck, dessen einer (spitzer) Winkel gegeben ist, aus der Hypothenuse die Katheten oder aus der einen Kathete die Hypothenuse und die andere Kathete zu berechnen. Es findet alsdann jedes rechtwinklige Dreieck, dessen solcher Winkel gegeben, in jener Reihe ein geometrisch ähnliches und es kann zwischen dem Dreieck jener Tabelle und dem in Rechnung stehenden eine Proportion angesetzt werden. Ja noch mehr, man könnte mit Hülfe dieser Dreiecksreihe aus der Hypothenuse und einer der Katheten eines gegebenen Dreiecks, wenn man mit Hülfe der Hypothenuse des Dreiecks der Tabelle die Katheten desselben berechnete, aus dieser die Winkel des Dreiecks selbst ermitteln. Läßt man bei den Werthen der Katheten in der Tabelle die Hypothenuse r = 1 werden, so ist die übrigbleibende Zahl die Länge der Kathete selbst, aber auch zugleich das Verhltniß der Kathete zur Hypothenuse.

§. 24. **Die trigonometrischen Functionen für spitze Winkel.** Diese in §. 9 angefangene, für das rechtwinklige Dreieck so wichtige, die Kathetenwerthe, resp. die Verhältnisse der Katheten zur Hypothenuse, enthaltende Tabelle hat man nun, wie oben angedeutet, durch Hülfsmittel, die wir später kennen lernen werden, vervollständigt und überdieß diese Verhältnisse mit besonderen Namen bezeichnet. So nennt man:

1) das Verhältniß zwischen der einem gewissen Winkel gegenüberliegenden Kathete und Hypothenuse; oder die dem Winkel gegenüberliegende Kathete gemessen durch die Hypothenuse, den Sinus dieses Winkels.

2) Das Verhältniß zwischen der dem Winkel anliegenden Kathete und der Hypothenuse, oder die dem Winkel anliegende Kathete gemessen durch die Hypothenuse, den Cosinus dieses Winkels; und

3) das Verhältniß zwischen der dem Winkel gegenüberliegenden und der ihm anliegenden Kathete, oder die dem Winkel gegenüberliegende Kathete, gemessen durch die ihm anliegende die Tangente des Winkels.

Sind also in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen einer (spitzer) Winkel α heißen mag, a die Hypothenuse, b die dem Winkel α gegenüberliegende und c die ihm anliegende Kathete, und bezeichnet man den Sinus des Winkels α mit $\sin \alpha$, ebenso den Cosinus dieses Win-

kels mit $\cos\alpha$ und analog die Tangente mit $\operatorname{tg}\alpha$, so drücken die drei Formeln: $\frac{b}{a} = \sin\alpha$; $\frac{c}{a} = \cos\alpha$; $\frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$ die drei obigen Definitionen aus.

Leicht ist hier zu ersehen, daß durch Division von Sinus durch Cosinus die Tangente entsteht. Es ist nämlich:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha.$$

In jenen drei Formeln sind nun alle im rechtwinkligen Dreieck vorkommenden Verhältnisse enthalten und sie genügten mit Hülfe der oben besprochenen Tabelle (trigonometrischen Tafel), um aus irgend zwei Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks das Dritte zu berechnen. Natürlich mit Zuziehung der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$. Es sind jedoch die drei umgekehrten Verhältnisse der oben aufgeführten ebenfalls mit Namen bezeichnet worden und man hat:

4) das Verhältniß der dem Winkel anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden, oder die dem Winkel anliegende Kathete gemessen durch die gegenüberliegende die Cotangente des Winkels,

5) das Verhältniß der Hypothenuse zu der dem Winkel anliegenden Kathete, oder die Hypothenuse gemessen durch die dem Winkel anliegende Kathete die Secante des Winkels, und endlich

6) das Verhältniß der Hypothenuse zu der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete, oder die Hypothenuse gemessen durch die dem Winkel gegenüberliegende Kathete: Cosecante des Winkels genannt.

Mit der oben eingeführten Bezeichnungsart der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks hat man also, wenn $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ die entsprechenden Abkürzungen sind:

$$\frac{c}{b} = \operatorname{cotg}\alpha, \quad \frac{a}{c} = \sec\alpha, \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Es ist mithin $\operatorname{cotg}\alpha$ nichts als $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; und $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ eben so wie $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.*)

Man nennt nun diese sechs von den Winkeln abhängige Werthe die Functionen der Winkel, goniometrische oder trigonometrische Functionen.

§. 25. **Die trigonometrische Functionen als Längen und im Kreise dargestellt.** Da nach §. 24, 1) der Sinus die Länge der dem

*) Es ist mithin $\operatorname{cosec}\alpha$ nichts als $(\sin\alpha)^{-1}$ und $\sec\alpha = (\cos\alpha)^{-1}$ ꝛc.; es können daher diese Werthe $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ ebenso vermieden werden, wie in der Algebra die negativen Potenzen zu vermeiden sind.

Winkel gegenüberliegenden Kathete, gemessen durch die Hypothenuse, ist, so darf, wenn man der Hypothenuse eine Größe gibt, welche als die Längeneinheit angesehen werden kann, man den Sinus als die Länge der gegenüberliegenden Kathete oder schlechtweg als die gegenüberliegende Kathete selbst bezeichnen. Ist also AC Fig. (26) gleich dieser Längeneinheit, so repräsentirt AB den Sinus und ähnlich BC den Cosinus des Winkels α (§. 24, 2). Ist aber CD = AC, gleich jener Einheit, so stellt DE die Tangente dieses Winkels dar (§. 24, 3) und EC die Secante (§. 24, 5); ist endlich FG = AC, gleich jener Einheit, so stellt FC die Cotangente (§. 24, 4) und CG die Cosecante des Winkels α (§. 24, 6) dar.

Denkt man nun, um sich die Größen dieser trigonometrischen Linien für die verschiedenen Größen des gegenüberliegenden Winkels zu vergegenwärtigen, mit der Längeneinheit AC Fig. (27) als Radius einen Quadranten beschrieben, und AC als linken Schenkel, während BC in seinen verschiedenen Lagen als rechter Schenkel des in Betracht zu ziehenden Winkels α gilt, so kann man sagen, der Sinus ist dargestellt durch die von dem Endpunkt B des rechten Schenkels gefällte Senkrechte BD, und das zwischen dem Fußpunkt des Sinus und dem Mittelpunkt liegenden Stück DC des linken Schenkels stellt den Cosinus dieses Winkels α dar. Hat man weiter in A dem Endpunkt des linken Schenkels auf diesem eine Senkrechte AE errichtet, so kann man sagen, die Längen AE und EC repräsentirten, resp. die Tangenten und Secanten jener Winkel. Ist endlich im Endpunkt F des Quadranten auf den Radius FC eine Senkrechte errichtet, so sind analog die FG und GC als Cotangenten und Cosecanten der Winkel α zu bezeichnen.

Hiernach sind nun die trigonometrischen Functionen mit dem Kreisbogen, resp. dem Kreise in Berührung gebracht und man belegt sie deßhalb auch oft dem entsprechend mit der allgemeinen Bezeichnung Kreisfunctionen. Diese Betrachtung der Functionen im Kreis hat weiter dahin geführt, dem andern Stück, das von dem Radius AC durch den Sinus abgeschnitten wird, eine Bezeichnung zu geben. Man nennt nämlich die Länge AD den „Sinus versus" (sin vers) des Winkels α und analog das Stück HF „Cosinus versus" (cos vers) dieses Winkels.

§. 26. **Die Functionen stumpfer Winkel.** Wir haben in §. 24 erwähnt, daß mit Hülfe der verschiedenen Functionen (unter Zuziehung von $a^2 = b^2 + c^2$) in jedem rechtwinkligen Dreieck, sobald zwei Stücke gegeben sind, die übrigen durch Rechnung gefunden werden können. Da nun jedes schiefwinklige Dreieck, jedes Polygon, ja jede dreikantige körperliche Ecke auf rechtwinklige Dreiecke zurückgeführt wer-

den kann, so genügen jene Werthe auch zur Berechnung aller dieser Formen. Weil aber in jenen Formeln, wie ihre Herkunft bedingt, nur spitze Winkel vorkommen, in diesen Figuren aber oft stumpfe und überstumpfe Winkel erscheinen, so müßten diese letzten immer zuerst durch die entsprechenden spitzen vertreten werden, ehe man auf sie jene Formeln anwenden könnte, und umgekehrt würden bei der Berechnung der unbekannten Winkel sehr oft Winkel erscheinen, die der Figur nicht direct angehören.

Diesem Mangel abzuhelfen, wollen wir die trigonometrischen Functionen, die bisher für uns nur bei spitzen Winkeln existirten, auch auf stumpfe Winkel ausdehnen. Zu diesem Zwecke ist die Betrachtung der Winkel als Centriwinkel im Kreise, wie Fig. (27), sehr passend.

Es sei wieder wie in §. 25 AC Fig. (28) die Einheitslänge und der linke Schenkel aller Winkel. Läßt man nun den rechten Schenkel sich bewegen, so daß der Winkel zunimmt, so wird BC einmal in EC zu liegen kommen und der Sinus BD wird zu EC = 1; bewegt sich aber dieser Schenkel noch weiter bis in die Lage CF, so kann die Senkrechte von F aus nicht mehr den linken Schenkel AC selbst treffen, wohl aber dessen Verlängerung CG; FH wird auch hier als Sinus des Winkels ACF angesehen werden können, ebenso wie EC = 1 der Sinus von ACE = 90° war. Ist nun der Winkel ACF′ dem Winkel GCF gleich, also FH = F′H′, und man kann sagen: der Sinus des stumpfen Winkels ACF sei dem Sinus seines spitzen Supplementwinkels gleich:

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha).$$

Betrachten wir ebenso den Cosinus bei der Bewegung des rechten Schenkels, so nimmt er mit dem Wachsen des spitzen Winkels immer mehr und mehr ab, wird bei ACE = 90° zu 0 und weiter hinaus, wie wir aus der algebraischen Geometrie wissen, als negativ angesehen werden müssen, so daß wir die Länge CH, den Cosinus des stumpfen Winkels ACF, als eine negative Größe betrachten. Dabei ist aber H′C = HC; also: der Cosinus eines stumpfen Winkels gleich dem negativ genommenen Cosinus seines spitzen Supplements:

$$\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha).$$

Analog wird die Cotangente beim Wachsen des Winkels immer kleiner und für ACE = 90° zu 0. Für die Winkel über 90° wie ACF muß L′E über E hinaus verlängert werden, damit der rechte Schenkel des Winkels etwas an ihr abschneide. Es ist alsdann EL die Cotangente von ACF, eine negative Länge und der Cotangente EL′ von ACF′ an Länge gleich; die Cotangente eines stumpfen Winkels ist

also gleich der negativ genommenen Cotangente des spitzen Supplements:

$$\cotg \alpha = - \cotg (180^0 - \alpha).$$

Mit dem Wachsen es Winkels wird auch die Tangente immer länger und für ACE=90⁰ wird sie gar nicht mehr von dem rechten Schenkel abgeschnitten, wird also unendlich groß. Ueber 90⁰ hinaus ist der rechte Schenkel und AI gar divergirend, es muß also ähnlich, wie bei der Cotangente AI über A hinaus verlängert werden, um von dem, dann aber über den Scheitel hinaus verlängerten, rechten Schenkel getroffen werden zu können. Man sieht also AK als Tangente des Winkels ACF an. Dasselbe ist in seiner Lage, gegen die Tangente AI gehalten, als negativ zu betrachten, aber gleich AK′. Es ist also auch: die Tangente des stumpfen Winkels gleich der negativ genommenen Tangente des spitzen Supplementwinkels:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{tg} (180^0 - \alpha).$$

Ebenso ist KC das über den Mittelpunkt verlängerte Stück des rechten Schenkels die Secante und gilt für negativ; CL aber die Cosecante, die positiv, weil sie ebenso wie bei spitzen Winkeln der verlängerte rechte Schenkel ist.

Es ist also allgemein jede trigonometrische Function eines stumpfen Winkels ebenso groß, wie die seines spitzen Supplementwinkels, nur sind alle, mit Ausnahme des Sinus und der Cosecante $\left(\frac{1}{\sin}\right)$, als negativ zu betrachten.

§. 27. **Die trigonometrischen Functionen der überstumpfen Winkel.** Betrachten wir nun weiter die trigonometrischen Functionen der Winkel, welche über 180⁰ hinausgehen, also im dritten Quadranten, d. h. zwischen 280⁰ und 170⁰, oder im vierten, zwischen 270⁰ und 360⁰ liegen.

Es wird hier der Sinus DE Fig. (29) des stumpfen Winkels ACD, indem der Winkel gegen 180⁰ hin wächst, immer kleiner und kleiner, bis er endlich für ACF = 180⁰ gleich 0 wird; über ACF hinaus, z. B. für ACB ist die von dem Endpunkt B des rechten Schenkels auf AF gefällte Senkrechte als der Sinus des Winkels, ebenso wie bei ACD, anzusehen, nur ist derselbe, da er inzwischen gleich 0 war (die Senkrechte kommt auch von der entgegengesetzten Richtung), eine negative Größe. Ist nun Winkel ACG = FCB, so ist auch GH = BI, der Sinus eines Winkels also, der größer ist als 180⁰ und kleiner als 270⁰, gleich dem negativ genommenen Sinus des spitzen Winkels, um welchen er 180⁰ übertrifft, oder:

$$\sin \alpha = - \sin (\alpha - 180^0)$$

Die Länge CI ist, ebenso wie CE des Cosinus des Winkels ACD, der Cosinus von ACB und negativ; also, da CI = HC:

$$\cos \alpha = - \cos (\alpha - 180^0).$$

Als Tangente des Winkels ACB wird die Linie AK auftreten, also ganz dieselbe, wie für Winkel ACG, daher positiv; demnach ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha - 180^0).$$

Als Secante desselben Winkels erscheint die Linie CK, welche, da CB der rechte Schenkel ist, als negativ gilt, also:

$$\sec \alpha = - \sec (\alpha - 180^0).$$

LM endlich ist die Cotangente des in Rede stehenden Winkels, also ganz wie des Winkels ACG, daher positiv, d. h.:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} (\alpha - 180^0).$$

Zuletzt ist endlich CL die Cosecante des Winkels ACB gleich der Cosecante des Winkels ACG nur, aus demselben Grunde wie die Secante, negativ, so daß:

$$\operatorname{cosec} \alpha = - \operatorname{cosec} (\alpha - 180^0).$$

Es gilt also allgemein für alle die Winkel, welche größer als 180° und kleiner als 270° im dritten Quadranten liegen, daß ihre trigonometrischen Functionen gleich denen des spitzen Winkels sind, um welche sie 180° übertreffen, aber alle bis auf die Tangente und Cotangente $\left(= \frac{1}{\text{tangente}}\right)$ negativ genommen.

Für die Winkel endlich, welche größer als 270° (und kleiner als 360°) im vierten Quadranten liegen, ist leicht auf analoge Art darzuthun, daß allgemein ihre trigonometrischen Functionen gleich den entspechenden derjenigen Winkel sind, welche sie zu 360° ergänzen, alle mit Ausnahme des Cosinus und der Secante $\left(= \frac{1}{\text{cosinus}}\right)$ negativ genommen; es ist also:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= - \sin (360^0 - \alpha) \\
\cos \alpha &= \cos (360^0 - \alpha) \\
\operatorname{tg} \alpha &= - \operatorname{tg} (360^0 - \alpha) \\
\operatorname{cotg} \alpha &= - \operatorname{cotg} (360^0 - \alpha) \\
\sec \alpha &= \sec (360^0 - \alpha) \\
\operatorname{cosec} \alpha &= - \operatorname{cosec} (360^0 - \alpha);
\end{aligned}$$

und weiter wie leicht einzusehen:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= \sin (360 + \alpha) \\
\cos \alpha &= \cos (360 + \alpha) \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

§. 28. **Uebersicht des Zusammenhangs zwischen den trigonometrischen Functionen der verschiedenen Winkelarten.** Die in den Paragraphen 26 und 27 enthaltenen Resultate setzen uns beim Gebrauch der trigonometrischen Functionen der verschiedenen Winkelarten in den Stand, die trigonometrischen Functionen aller Winkel auf die des spitzen, in §. 24 erklärten zurückzuführen, so daß die Winkel aller Figuren mit den spitzen Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks in Zusammenhang zu stehen kommen. Es ist somit auch nicht nothwendig, daß die Größen der trigonometrischen Functionen in den Tabellen (trigonometrischen Tafeln) für alle mögliche Winkel, spitze, stumpfe und überstumpfe aufgeführt sind, sondern nur für alle die möglichen spitzen, weil man dann alle übrigen ebenfalls hat.

Es ist, wie leicht einzusehen, bei Ausführung trigonometrischer Rechnungen sehr nothwendig, den in den Paragraphen 26 und 27 gefundenen Zusammenhang zwischen den Functionen der verschiedenen Winkelarten im Gedächtniß zu haben. Man kann zu diesem Ende jene sämmtlichen Resultate, abgesehen freilich von allen Zeichen, so zusammenfassen: jeder Winkel, der durch einen spitzen Winkel zu 180° oder 360° ergänzt wird, oder diese Gradzahlen selbst um einen solchen Winkel übertrifft, hat seine sämmtlichen trigonometrischen Functionen gleich denen dieses spitzen Winkels.

Was die Zeichen anlangt, so sind im ersten Quadranten alle Functionen positiv, und in den übrigen allein diejenigen, welche dieselbe Lage Fig. (29), wie die im ersten Quadranten haben; die andern sind negativ. Es sind diese also leicht mit Hülfe der Figur im Gedächtniß zu behalten. — Bemerkt man auf diese Weise sich bloß Sinus und Cosinus, so sind:

1) die Sinus über der Linie AB Fig. (29) positiv und unter ihr negativ; also für Winkel im ersten und zweiten Quadranten positiv; für solche im dritten und vierten negativ.

2) Die Cosinus sind links von MC positiv, rechts negativ; also im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

Aus diesen folgen dann leicht die übrigen, da:

3) Die Secante dasselbe Zeichen, wie der Cosinus, (weil sie $= \frac{1}{\text{cosinus}}$ ist)

4) die Cosecante dasselbe Zeichen, wie der Sinus, (weil sie $= \frac{1}{\text{sinus}}$ ist), hat;

5) Tangente und Cotangente aber positiv sind, wenn Sinus und Cosinus gleiche Zeichen haben, also im Quadrant I und III, und negativ, wenn diese ungleiche Zeichen haben, also im Quadrant II und IV $\left(\text{weil } \operatorname{tang} = \frac{\text{sinus}}{\text{cosinus}} \text{ und } \operatorname{cotang} = \frac{1}{\operatorname{tang}} = \frac{\text{cosinus}}{\text{sinus}} \text{ ist}\right)$.

Aus den Definitionen des §. 24 geht, wenn β der zweite spitze Winkel im rechtwinkligen Dreieck, und dann b die dem Winkel β anliegende und c die ihm gegenüberliegende Kathete ist, hervor, daß:

$$\sin\beta = \frac{c}{a} = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{b}{a} = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b} = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\sec\beta = \frac{a}{b} = \operatorname{cosec}\alpha$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{a}{c} = \sec\alpha \text{ ist;}$$

oder es ist allgemein:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \cos\ (90^0 - \alpha) \\
\cos\alpha &= \sin\ (90^0 - \alpha) \\
\operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{cotg}\ (90^0 - \alpha) \\
\operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{tg}\ (90^0 - \alpha) \\
\sec\alpha &= \operatorname{cosec}\ (90^0 - \alpha) \\
\operatorname{cosec}\alpha &= \sec\ (90^0 - \alpha).
\end{aligned}$$

Es ist also allgemein jede trigonometrische Function eines spitzen Wikels gleich der Cofunction seines Complementwinkels (wo die Bezeichnung „Cofunction“ nach dem Vorhergehenden leicht verstanden werden wird).

Wollte man auch die Winkel $90^0 + \alpha$, $270^0 - \alpha$ und $270^0 + \alpha$ auf diese Art betrachten, so ist, wie leicht aus der betreffenden Figur und dem Frühergehabten hervorgeht:

$$\begin{aligned}
\sin\ (90^0 + \alpha) &= \cos\alpha \\
\cos\ (90^0 + \alpha) &= -\sin\alpha \\
\operatorname{tg}\ (90^0 + \alpha) &= -\operatorname{cotg}\alpha \\
\operatorname{cotg}\ (90^0 + \alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha
\end{aligned}$$

$$\sec(90^0 + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(90^0 + \alpha) = \sec\alpha;$$

und:

$$\sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(270^0 - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(270^0 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\sec(270^0 - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(270^0 - \alpha) = -\sec\alpha;$$

und endlich:

$$\sin(270^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^0 + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(270^0 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\sec(270^0 + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(270^0 + \alpha) = -\sec\alpha.$$

Abgesehen von den Zeichen kann allgemein die Regel aufgestellt werden: die Winkel, welche durch spitze Winkel zu 90^0 oder 270^0 ergänzt werden, oder diese Gradzahlen um spitze Winkel übertreffen, haben ihre sämmtlichen Functionen den Cofunctionen des betreffenden spitzen Winkels gleich. Die Zeichen folgen, da spitze Winkel alle Functionen positiv haben, aus den früheren Regeln von selbst. — Bemerkt mag hier noch werden, daß, da die beiden Winkel $45 + \alpha$ und $45^0 - \alpha$ zusammen 90^0 betragen:

$$\sin(45 + \alpha) = \cos(45 - \alpha)$$
$$\cos(45 + \alpha) = \sin(45 - \alpha)$$
$$\operatorname{tg}(45 + \alpha) = \operatorname{cotg}(45 - \alpha) \text{ und}$$
$$\operatorname{cotg}(45 + \alpha) = \operatorname{tg}(45 - \alpha) \text{ ist.} —$$

§. 29. **Allgemeine Definitionen der trigonometrischen Functionen im Kreis.** Nach der Ausdehnung, welche der Begriff der trigonometrischen Functionen in den Paragraphen 26 und 27 erhalten, kann man die Definition derselben nun folgendermaßen faßen:

In dem Kreise, dessen Radius gleich der Längeneinheit, ist:

1) Der Sinus eines Centriwinkels die Senkrechte, welche vom Endpunkt des zugehörigen Bogens auf den Durchmesser, der durch den Anfangspunkt des Bogens geht, gefällt ist;

2) der Cosinus dieses Winkels das zwischen dem Fußpunkt des Sinus und dem Mittelpunkt liegende Stück jenes Durchmessers;

3) die Tangente jenes Winkels das Stück der an den Anfangspunkt des Bogens gezogenen Berührenden, welches zwischen die-

sem Punkt und dem so, daß er diese Berührende trifft, verlängerten rechten Schenkel liegt;

4) die Cotangente das Stück der an den Endpunkt des ersten Quadranten gezogenen Berührenden, zwischen diesem Punkt und dem, analog dem obigen, verlängerten rechten Schenkel des Winkels;

5) die Secante ist das Stück des verlängerten rechten Schenkels zwischen dem Mittelpunkt und der Tangente;

6) die Cosecante das entsprechende Stück zwischen dem Mittelpunkt und der Cotangente.

Da hier alle diese Linien mittelbar auch von dem Bogen des Winkels abhängen, so redet man von ihnen auch als Functionen des Bogens, und spricht so z. B. von dem Sinus des Bogens α, wo α die Länge des rectificirten Bogens bedeutet. Hat der Kreis nicht die Längeneinheit als Radius, so werden diese Linien alle durch den Radius gemessen (dividirt).

Nach dieser Definition ergeben sich die Zeichen der trigonometrischen Functionen, wie folgt:

Der Sinus ist positiv, wenn die Senkrechte in derselben Richtung gefällt wird, wie bei den spitzen Winkeln, sonst negativ;

der Cosinus ist positiv, wenn er auf derselben Hälfte des Diameters liegt, wo die Cosinus der spitzen Winkel liegen, sonst negativ;

die Tangente und Cotangente sind positiv, wenn sie auf dem Theil der Berührenden liegen, wo die Tangenten und Cotangenten der spitzen Winkel liegen, sonst negativ;

die Secante und Cosecante sind positiv, wenn der rechte Schenkel des Winkels wirklich einen Theil von ihnen bildet; sind sie aber bloß dessen Verlängerung über den Mittelpunkt hinaus, so sind sie negativ.

§. 30. **Das Wachsen und Abnehmen der trigonometrischen Functionen mit den Winkeln** Der Sinus ist für den Winkel von 0°, wie leicht einzusehen, selbst = 0 und wächst durch den ganzen ersten Quadranten mit dem Winkel, hat bei 90° den Werth 1, als dem größten, den er erhalten kann; über 90° nimmt er bei dem Zunehmen des Winkels ab, wird bei 180° gleich 0 und über 180° negativ, erhält aber dabei immer größere und größere Längen, d. h. er er wird immer kleiner und kleiner, bis er für 270° gleich — 1 wird und so den kleinsten Werth hat, den er annehmen kann; von 270° bis 360° wächst er wieder von — 1 bis 0. Der Sinus wächst also von 270° über 360°, resp. 0°, bis 90° von — 1 über 0 bis + 1 und nimmt von 90° über 180° bis 270° von + 1 über 0 bis — 1 ab.

Der Cosinus ist bei 0^0 gleich 1 und nimmt bei Zunehmen des Winkels von 0^0 bis 180^0 von 1 über 0 bis -1 ab; bei weiterem Wachsen des Winkels von 180^0 über 270^0 bis 360^0 wächst er wieder von -1 über 0 bis $+1$.

Die Tangente ist bei 0^0 gleich 0, wächst aber dann mit dem Winkel sehr rasch und ist für Winkel nahe bei 90^0 sehr groß, für 90^0 selbst unendlich; für die Winkel im zweiten Quadranten, die sehr nahe bei 90^0, haben die Tangenten sehr große Längen, die mit dem Wachsen des Winkels immer kleiner werden, bis sie bei 180^0 gleich 0 sind. Da aber die Tangenten im ganzen zweiten Quadranten negativ sind, so wachsen sie mit dem Winkel und man kann sagen, daß mit dem Wachsen des Winkels von 0^0 über 90^0 bis 180^0 die Tangente von 0 bis $+\frac{1}{0}$ und von $-\frac{1}{0}$ bis 0 wächst. Weil sie dicht unter 90^0 positive und dicht über 90^0 negative sehr große Werthe hat, ist nicht entschieden, ob sie bei 90^0 gleich $+\frac{1}{0}$ oder $-\frac{1}{0}$ ist. Ueber 180^0 nimmt sie ebenso von 0 bis $+\frac{1}{0}$ und von $-\frac{1}{0}$ bis 0 zu. Die Tangente nimmt also mit dem Zunehmen des Winkels fortwährend zu.

Die Cotangente verhält sich in ähnlicher Weise, nur gerade umgekehrt; bei 0^0 ist sie unendlich und nimmt bis zu 90^0 bis 0 ab, und dann weiter von 90^0 bis zu 180^0, von 0 bis $-\frac{1}{0}$; von da bis 270^0 nimmt sie wieder von $+\frac{1}{0}$ bis 0, und von da bis zu 360^0 von 0 bis $-\frac{1}{0}$ ab. Die Cotangente nimmt also mit dem Wachsen des Winkels fortwährend ab.

Die Secante wächst von 0^0 bis zu 90^0 von 1 bis $+\frac{1}{0}$, von 90^0 bis 180^0 von $-\frac{1}{0}$ bis -1, nimmt dann von 180^0 bis 270^0 von 1 bis $-\frac{1}{0}$, und von 270^0 bis 360^0 von $+\frac{1}{0}$ bis 1 ab.

Die Cosecante ist bei 0^0 gleich unendlich und nimmt im ersten Quadranten bis 1 ab und dann wieder im zweiten bis $+\frac{1}{0}$ zu, im

dritten nimmt sie von $-\frac{1}{0}$ bis -1 zu und dann wieder von -1 bis $-\frac{1}{0}$ ab. —

§. 31. **Zusammenhang zwischen den einzelnen trigonometrischen Functionen.** Wir haben schon in §. 24 gesehen, daß:

$$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1 \quad \ldots \quad (1)$$

$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

und:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 \quad \ldots \quad (3)$$

ist; ferner §. 25:

$$\sin\operatorname{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha \text{ und } \cos\operatorname{vers}\alpha = 1 - \sin\alpha.$$

Es ist aber leicht, noch weiteren Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Functionen zu finden. So ist 1), da Sinus und Cosinus als die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse $= 1$, angesehen werden können, für alle Winkel:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \ldots \quad (4)$$

oder:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\,{}^{*)} \quad \ldots \quad (5)$$

und

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad \ldots \quad (6)$$

und weiter: 2) da die vier Dreiecke, in welchen der Sinus und der Cosinus, die Tangente und die Cotangente liegen, je zwei einander ähnlich sind Fig. (26):

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots \quad (7)$$

und:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha \quad \ldots \quad (8)$$

und endlich 3) in zwei von den Dreiecken unter 2):

$$\sec\alpha = \pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\,{}^{**)} \quad \ldots \quad (9)$$

und:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} \quad \ldots \quad (10)^{***)}$$

---

*) Die $\pm$ vor den Wurzeln sind deßhalb, weil der $\sin\alpha$ für denselben Werth des $\cos^2\alpha$ verschiedene Zeichen haben kann und ebenso das $\cos\alpha$ für gleiche Werthe des $\sin^2\alpha$.

**) Analog den (5) und (6).

***) Es ist nicht schwer, sich zu überzeugen, daß diese 10 Formeln, die oben eigentlich nur für die trigonometrischen Functionen spitzer Winkel gefunden wurden, auch für die trigonometrischen Functionen der übrigen richtig sind. Es sei z. B. der Winkel α' ein stumpfer $= 180° - \alpha$, so ist nach §. 26:

$$\sin\alpha' = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = -\operatorname{tg}\alpha$$

oder: $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$ . . . . . . (11)

und: $\operatorname{cotg}\alpha = \pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}$ . . . . . . (12)

Aus (1) und (10) folgt dann weiter:

$$\sin\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}} \quad . . . . . . (13)$$

und aus (2) und (9):

$$\cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad . . . . . . (14)$$

und endlich aus (7) und (14):

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha = \frac{\pm \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad . . . . . . (15)$$

und ebenso aus (8) und (13):

$$\cos\alpha = \operatorname{cotg}\alpha \sin\alpha = \frac{\pm \operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}} \quad . . . . (16).$$

Da man in beinahe allen neueren trigonometrischen Tafeln die Werthe der, übrigens auch ziemlich unnützen Functionen Secante und Cosecante nicht aufgezeichnet findet, also auch schließlich nicht mit ihnen rechnen kann, so muß man sie aus dem Endresultat doch immer verbannen, und wir wollen dieselben schon von vornherein vermeiden, deßhalb unter den obigen Formeln nur den folgenden 6 Wichtigkeit beilegen:

$\sin^2\alpha + \cos^2 = 1$; resp. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ u. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ (I)

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \quad . . . . (II)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha \quad . . . . (III)$$

$$\operatorname{cotg}\alpha' = - \operatorname{cotg}\alpha$$
$$\sec\alpha' = - \sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}\alpha' = \operatorname{cosec}\alpha$$

und die Formeln (1) bis (4) und (7) bis (10) behalten für den Winkel α' ihre Richtigkeit. Man sieht also hierdurch um so mehr, daß die im §. 26 aufgeführten Größen für die Functionen der stumpfen Winkel ihnen auch hier eben so gut entsprechen, wie die der spitzen. Aehnlich ist es bei diesen Formeln für die Functionen der übrigen Winkel, wie sich der Lernende selbst erweisen mag.

Man kann übrigens die obigen Formeln auch ohne Figur bloß aus den Grundformeln $\frac{b}{a} = \sin\alpha$; $\frac{c}{a} = \cos\alpha$ ꝛc, und $b^2 + c^2 = a^2$, finden.

$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1$; resp. $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$ und $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. (IV)

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}} \quad \text{(V)}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \text{(VI)}$$

Zur Uebung im Rechnen mit diesen Formeln mag der Lernende die Reduction folgender Ausdrücke vornehmen:

1) $3 + \cos^2\alpha\ (2\cos^2\alpha + 3) - \sin^2\alpha\ (6\cos^2\alpha + 3)$ verwandelt sich in $8\cos^4\alpha$.
2) $6\sin^6\alpha \operatorname{cotg}\alpha\ (1 + 3\cos^2\alpha) - 6\operatorname{cotg}\alpha \sin^8\alpha$ verwandelt sich in $24\sin^5\alpha\cos^3\alpha$.
3) $7\operatorname{tg}^6\alpha\cos^7\alpha\ (2 + 7\cos^2\alpha) - 14\operatorname{cotg}\alpha\sin^9\alpha$ verwandelt sich in $63\sin^6\alpha\cos^3\alpha$.
4) $3\cos^4\alpha + 4\cos^2\alpha + 8 - 8\sin^2\alpha - 12\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ verwandelt sich in $15\cos^4\alpha$.

Drittes Kapitel.

Goniometrie.

§. 32. **Stellung der Goniometrie zu der Trigonometrie.** Unter Goniometrie wollen wir die echnungsoperationen und die Formeln, uf welche diese sich gründen, verstehen, in welchen bloß die trigonometrischen Functionen der Winkel, abgesehen von ihrer Anwendung auf das Dreieck, eine Rolle spielen. Da nämlich die Aufgaben der Trigonometrie durch deren Formeln, ähnlich wie die der algebraischen Geometrie aus den Formeln dieser gelöst werden, dort aber die trigonometrischen Functionen ins Spiel kommen, so ist es nothwendig mit diesen Rechnungsoperationen, ähnlich den algebraischen, unternehmen zu könn n. Diese Operationen müssen natürlich in dem inneren Wesen der Functionen begründet sein. Die Goniometri bildet nach dieser Ansicht eine Art trigonometrischer Algebra und steh ebenso zur Trig nometrie, wie die eigentliche Algebra zur algebraischen Geomet ie. Leicht ist es zu übersehen welches das Feld der Goniometrie sein mag; denn die Rechnung mit den Winkeln und ihre Functionen werden immer auf die Rechnungsarten der Arithmetik und Algebra hinauskommen.

Nehmen wir also zuerst an, wir hätten zwei Winkel, α und β, deren Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente ꝛc. uns bekannt sind, so wird die erste Frage sein, wie wir den Sinus, Cosinus und die Tangente ꝛc. von dem Winkel, welcher $= \alpha + \beta$ ist, oder $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ꝛc. aus jenen berechnen. Aus diesen folgt dann leicht, wenn das Gesetz der Functionen der Winkelsumme allgemein festgestellt ist: $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ ꝛc.

Die zweite zu beantwortende Frage wird dann sein, wie findet man aus den obigen Functionen die der Differenz $\alpha - \beta$, d. h. $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ ꝛc.

Die dritte ist dann, wie findet man so $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ ꝛc. und endlich die vierte, wie $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $\cos \frac{1}{2}\alpha$ ꝛc.

§. 33. **Die Formeln für die Functionen der Winkelsumme.** Um den Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel zu erhalten, sind Fig. (30) die beiden Winkel α und β in eine Lage neben einander gebracht, daß ihre Summe entsteht; ist nun $AB = 1$, so ist BC der $\sin(\alpha+\beta)$ und AC der $\cos(\alpha+\beta)$, während BD der $\sin\beta$ und AD der $\cos\beta$ ist. Ebenso sind EF und AF gleich $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, sobald AE die Einheit darstellt.

Es kommen nun in den drei, in der Figur enthaltenen, einander ähnlichen Dreiecken AEF, AGC und BGD die obigen Functionen alle vor, nur ist dabei der $\sin(\alpha+\beta) = BC$ in die Stücke BG und GC, und ebenso $\cos\beta = AD$ in die Stücke AG und DG getrennt. Obgleich man also aus diesen an sich schon vorhandenen ähnlichen Dreiecken die gewünschten Formeln erhalten könnte, so ziehen wir doch vor, durch die von D aus gegen AF gefällte Senkrechte DH und die zu AF parallel gezogene DI die beiden unter sich und jenen ähnlichen Dreiecke BDI und ADH zu erzeugen, weil deren Hypothenusen, resp. AD und BD die Werthe $\cos\beta$ und $\sin\beta$ darstellen. Da überdieß im Dreieck BDI der Winkel bei B gleich α ist, so entsteht, indem:

$$\sin(\alpha+\beta) = BI + IC = BI + DH$$

und: $$\frac{BI}{BD} = \cos\alpha, \text{ oder } BI = \cos\alpha \sin\beta$$

ebenso: $$\frac{DH}{AD} = \sin\alpha, \text{ also } DH = \sin\alpha \cos\beta \text{ ist:}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad . \;\; . \;\; . \quad (1).$$

Aehnlich ist:

$$\cos(\alpha+\beta) = AC = AH - CH = AH - DI,$$

dann: $\frac{DI}{BD} = \sin\alpha$ oder $DI = \sin\alpha \sin\beta$

und: $\frac{AH}{BD} = \cos\alpha$ oder $AH = \cos\alpha \cos\beta$;

also: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ *) . . (2).

Setzt man die beiden so erhaltenen Formeln unter einander:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

so übersieht man ihre Aehnlichkeit und ihre Verschiedenheit, und kann sie leicht dem Gedächtniß einprägen.

Um nun den Ausdruck für $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ zu finden, setzt man zuerst $\beta + \gamma = \beta'$; es ist dann:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + \beta') = \sin\alpha \cos\beta' + \cos\alpha \sin\beta'$$
$$= \sin\alpha \cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha \sin(\beta+\gamma);$$

wenn nun für $\cos(\beta+\gamma)$ und $\sin(\beta+\gamma)$ die Werthe nach (1) und und (2) eingesetzt werden und man ordnet, so entsteht:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \quad . . . . (3).$$

Aehnlich erhält man:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \quad . . . . (4).$$

Der Lernende mag ebenso zur Uebung:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma \cos\delta + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma \cos\delta$$
$$+ \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma \cos\delta + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \sin\delta$$
$$- \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cos\delta - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \sin\delta$$
$$- \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma \sin\delta - \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\delta.$$

---

*) Aus jenen obigen drei einander ähnlichen Dreiecken AEF, AGC und BGD wäre entstanden:

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AC}{AF}, \text{ oder: } AG = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha},$$

und $\frac{DG}{BD} = \frac{EF}{AF}$, oder: $DG = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha}$;

oder: $AG + DG = \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha}$, woraus:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \text{ etc.}$$

Man kann auch die Formel (2) aus (1) mit Hülfe von $\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha+\beta)}$ erhalten. Wäre diese Entwicklung dem Lernenden zu schwierig, so mag er nachweisen, daß: $\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$ sich auf 1 reducirt. —

und:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$$
$$-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos\delta - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\cos\delta$$
$$-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\delta$$
$$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin\delta - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta$$

entwickeln. —

Um nun endlich $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ zu erhalten, erinnern wir uns, daß: $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ sein muß, also ist auch:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\cos\alpha\ \cos\beta$ Glied für Glied dividirt, damit durch $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ die $\mathrm{tg}\alpha$ und durch $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ die $\mathrm{tg}\beta$ entstehe:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Analog erhält man:

$$\mathrm{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{cotg}\alpha\ \mathrm{cotg}\beta - 1}{\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Es ist nun freilich noch nachzuweisen, daß die obigen Formeln für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ für alle Fälle, auch wenn α, β und $(\alpha+\beta)$ stumpfe oder überstumpfe Winkel, richtig sind. Diese Beweise sind aber leicht, sobald man die Figuren der obigen (30) entsprechend zeichnet und benennt. So sind z. B. für den Fall, wo α und β spitze Winkel, $\alpha+\beta$ aber ein stumpfer, alle Bezeichnung in der Fig (31) wie in der Fig. (30); es bedeuten daher auch die mit denselben Buchstaben bezeichneten Linien dieselben Größen, nur ist $AC = -\cos(\alpha+\beta)$, oder $\cos(\alpha+\beta) = -AC$. Zieht man auch hier, wie dort von dem Fußpunkt D des Sinus β die Senkrechte DH auf AC, resp. AF und DI parallel zu AC (auf BC senkrecht), so hat man dieselben ähnlichen Dreiecke, wie dort und ebenso im Dreieck BID bei B den Winkel α. Hierdurch entstehen dieselben Werthe für BI und DI, für AH und DH, also auch dieselben für:

$$\sin(\alpha+\beta) = BC = BI + IC = BI + DH$$

und für:

$$\cos(\alpha+\beta) = -AC = AH - CH = AH - DI.$$

Es gehen also hier dieselben Werthe, wie (1) und (2) aus dieser Figur hervor. Auf ähnliche Weise sind die analogen Figuren für

die übrigen Fälle leicht gezeichnet und die Entwicklung wird dann der obigen conform. Wir begnügen uns daher hier, diese übrigen Beweise für die allgemeine Richtigkeit der Formeln (1) und (2) dem Eifer des Lernenden zu überlassen. — Die noch gegebene Fig. (32) gilt für den Fall, wo α spitz, aber β und $(\alpha + \beta)$ stumpf sind.

Als eine Uebung mag der Lernende die in §. 26 für sin 90° und cos 90°, sowie wie weiter für sin 180° und cos 180°, für sin 270° und cos 270° gefundenen Werthe in diese Formeln (1) und (2) für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ einsetzen; er erhält so, wenn er überdieß noch β mit α vertauscht, die Werthe, die im §. 26 u. f. für: $\sin(90^0 + \alpha)$, $\cos(90^0 + \alpha)$, $\sin(180^0 + \alpha)$, $\cos(180^0 + \alpha)$, $\sin(270^0 + \alpha)$ und $\cos(270^0 + \alpha)$ erhalten wurden. *)

Auf ähnliche Weise kann man auch die Formeln für die Tangente und Cotangente von $(\alpha + \beta)$ behandeln.

§. 34. **Die Formeln für die Functionen der Winkeldifferenz.** Wenn man in der Figur des vorigen Paragraphen den Winkel β, statt neben den Winkel α, in denselben, also subtrahirend legt, so entsteht die Differenz $\alpha - \beta$ Fig. (33). Trägt man nun auf den linken Schenkel von $\alpha - \beta$ [wie dort von $(\alpha + \beta)$] die Größe $1 = AB$ auf, so ist BC der $\sin(\alpha - \beta)$ und AC der $\cos(\alpha - \beta)$; fällt man dann von B auf den linken Schenkel von α die Senkrechte BD, so ist diese gleich $\sin\beta$ und $AD = \cos\beta$. Die Hülfslinien DH und BI werden dem Früheren entsprechend ebenfalls gezogen und es entstehen wie dort die ähnlichen Dreiecke ADH und BDI (weil $BDI = \alpha$). Die Werthe DH und AH sind wie in §. 33; aber BI und DI sind verwechselt, also:

$$BI = \sin\alpha \sin\beta$$

und

$$DI = \cos\alpha \sin\beta.$$

Da aber nun:

$$\sin(\alpha-\beta) = BC = IH = DH - DI$$

$$\cos(\alpha-\beta) = AC = AH + HC = AH + BI \text{ ist,}$$

so entsteht hier ganz analog:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Leicht lassen sich auch die Gleichungen (7) und (8) aus (1) und (2) durch bloße algebraische Entwicklung finden, wenn man nämlich

---

*) Aehnlich verhält es sich, wenn man $\alpha + \beta = 90^0$, $\alpha + \beta = 180^0$, $\alpha + \beta = 270^0$ setzt und die Werthe für den $\sin\beta = \sin(180^0 - \alpha)$ und $\cos\beta = \cos(180^0 - \alpha)$ 2c. nach dem §. 26 u. f. in die Formeln (1) und (2) einführt. Man erhält alsdann die Werthe für sin 90°, cos 90° 2c.

eine Buchstabenvertauschung vornimmt, z. B. A statt $(\alpha + \beta)$ und B statt α, also A -- B statt β setzt. Es werden dann die Gleichungen (1) und (2) folgende:

$$\sin A = \sin B \cos (A-B) + \cos B \sin (A-B)$$
$$\cos A = \cos B \cos (A-B) - \sin B \sin (A-B).$$

Betrachtet man die Größen $\sin (A-B)$ und $\cos (A-B)$ als Unbekannte, so ist es leicht zuerst $\cos (A-B)$ aus beiden zu eliminiren und durch weitere Reductionen und Buchstabenvertauschung, wenn nämlich α statt A und β statt B gesetzt wird, die obige Gleichung (7) zu erhalten. Durch ähnliche Operationen, indem nämlich $\sin (A-B)$ eliminirt wird, entsteht die Gleichung (8). Wir empfehlen diese Operationen dem Lernenden.

$\mathrm{tg}\,(\alpha - \beta)$ und $\mathrm{cotg}\,(\alpha - \beta)$ gehen leicht aus (7) und (8) hervor, ähnlich wie $\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta)$ und $\mathrm{cotg}\,(\alpha + \beta)$ aus (1) und (2) des vorigen Paragraphen hervorgingen, und zwar wird:

$$\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

und:

$$\mathrm{cotg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\ \mathrm{cotg}\,\beta + 1}{\mathrm{cotg}\,\beta - \mathrm{cotg}\,\alpha} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (10).$$

Auch hier wäre die allgemeine Gültigkeit der Formeln nachzuweisen, sie ergibt sich aber leicht aus der allgemeinen Gültigkeit derer des vorigen Paragraphen von selbst. Auch hier mag der Lernende als Uebung die bekannten Werthe von $\sin (90^0 - \alpha)$, $\cos (90^0 - \alpha)$, $\sin (180^0 - \alpha)$ ꝛc. mit Hülfe der Formeln (7) und (8) entwickeln.

§. 35. **Die Functionen der negativen Winkel.** Vergleicht man die Formel (1) mit (7), sowie (2) mit (8), nämlich:

$$\sin (\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \ . \ . \ . \ . \ (1)$$
$$\sin (\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \ . \ . \ . \ . \ (7)$$

und:

$$\cos (\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \ . \ . \ . \ . \ (2)$$
$$\cos (\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \ . \ . \ . \ . \ (8)$$

so bemerkt man leicht, daß die beiden Formeln für die Functionen der Summe der Winkel in die für die Differenz übergehen, sobald man in dem letzten Gliede die Vorzeichen wechselt; da nun jedesmal in diesem Glied der Sinus des im letzteren Falle subtractiven Winkels β vorkommt, während in dem ersten Glied, wo $\cos\beta$ vorkommt, das Zeichen dasselbe bleibt, so folgern wir, daß die Functionen für die Summe der Winkel auch für die algebraische Summe, also auch für

den Fall gelten, wo β negativ ist, nur muß man den Sinus des negativen Winkels gleich dem negativen Sinus des positiven Winkels, den Cosinus jenes aber gleich dem Cosinus dieses setzen.

Oder:

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$
$$\cos(-\beta) = +\cos\beta;$$

hieraus und aus 5) und 9), 7) und 10) schließt man:

$$\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$$
$$\operatorname{cotg}(-\beta) = -\operatorname{cotg}\beta.$$

Bemerken wir, daß die Functionen des Winkels $(360^0 - \alpha)$ dieselben Eigenschaften hatten, daß nämlich:

$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^0 - \alpha) = +\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

und:

$$\operatorname{cotg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

wo $\alpha > 270^0$, war; so werden wir leicht einsehen, daß der Winkel $360^0 - \alpha$ als negativer Winkel betrachtet werden kann. Dieß wird auch deutlich, wenn man auf die Winkel den Grundsatz, der uns bei den Zeichen der Linien in der algebraischen Geometrie, bei den indirecten Größen leitete, anwendet; man kann nämlich einen Winkel durch Rückwärtsbewegen des rechten Schenkels gleich Null werden und durch weitere derartige Bewegung einen negativen Winkel der = jenem $360^0 - \alpha$ ist, entstehen lassen.

Man bemerkt auch leicht, daß in der Formel (8) für $\cos(\alpha - \beta)$ das β mit α vertauscht werden kann, ohne daß dieselbe sich ändert, daß also:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha),$$

daß aber in (7) diese Vertauschung die Folge hat, daß:

$$\sin(\beta - \alpha) = -\sin(\alpha - \beta),$$

was alles mit dem Obigen harmonirt.

Man kann, da durch diese Ansicht die Formeln für die Winkelsumme auch für die algebraische Summe gültig sind und darin auch negative Winkel vorkommen können, die erhaltenen Formeln für $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ und $\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ in die für $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$, $\sin(\alpha + \gamma - \beta)$, $\sin(\beta + \gamma - \alpha)$, $\sin(\alpha - \beta - \gamma)$ rc. rc. verwandeln, wenn man die Zeichen der Glieder, die den Sinus der negativen Winkel enthalten, wechselt.

So wird z. B. $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$ nach dem im vorigen Paragraph Gehabten nun $= \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Zur Uebung empfehlen wir nachzuweisen, daß:

1) $\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ sich reducirt auf $4\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma$,

2) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)$ sich reducirt auf $4\sin\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma$,

3) $\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ sich reducirt auf $4\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma$,

4) $\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ sich reducirt auf $4\cos\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma$.

§. 36. **Die Formeln für die Functionen der doppelten und halben Winkel.** Wie in der Arithmetik die Addition die Formel für die Multiplication und diese letztere die für die Division ergibt, so hier. Setzen wir in (1) und (2) $\alpha=\beta$, so entsteht:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha, \text{ oder:}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und:

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha, \text{ oder}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Nahe liegt es, diese letzte Formel mit Hülfe von $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ zu verwandeln; es entsteht so durch Addition: $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ und durch Subtraction $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$, oder:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

und:

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Ebenso entsteht aus 5) und 7):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} \text{ oder:}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

und:

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

Setzt man nun den bisherigen Winkel $\alpha=\frac{A}{2}$, so daß $2\alpha=A$ wird, so hat man in dem Vorhergehenden Gelegenheit, Ausdrücke für die Functionen der Hälfte eines Winkels zu finden.

Aus:

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

und aus:

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

wird nämlich:

$$1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2} A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und:

$$1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{1}{2} A \quad . \quad . \quad : \quad . \quad (18)$$

oder anders aufgelöst:

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und:

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Aus beiden enstehţ:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sqrt{1 - \cos A}$ mulíplicirt:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{\sin A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

oder wenn mit $\sqrt{1 + \cos A}$ ebenso multiplicirt wird:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{\sin A}{1 + \cos A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Für $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A$ hat man die drei Brüche nur umzukehren.

Wir empfehlen den Lernenden hier noch folgende Uebungen:

1) $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha$; für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ die Werthe nach Formel (11) und (14) eingesetzt, entsteht:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

2) $\cos 3\alpha$ wird analog dem vorigen $= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.
3) $\sin 4\alpha$ kann als $\sin 2\,(2\alpha) = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$, oder als $\sin(\alpha + 3\alpha) = \sin\alpha \cos 3\alpha + \cos\alpha \sin 3\alpha$ in $4\sin\alpha \cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha \cos\alpha$ verwandelt werden.
4) $\cos 4\alpha$ wird ebenso $= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$.
5) $\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha$.
6) $\cos 5\alpha = 5\cos\alpha - 20\cos^3\alpha + 16\cos^5\alpha$.

7) $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

8) $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}$.

§. 37. **Formeln zwischen den Functionen verschiedener Winkel.** Addirt man die beiden Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und für $\sin(\alpha - \beta)$ zusammen, so entsteht:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{A});$$

ebenso entsteht durch Subtraction dieser Formeln:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{B}).$$

Behandelt man die Formeln für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ entsprechend, so wird:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{C})$$

und:

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{D}).$$

Man kann nun in diesen vier Ausdrücken $\alpha+\beta = A$ und $\alpha-\beta = B$ setzen, alsdann ist auf der rechten Seite derselben $\alpha = \frac{A+B}{2}$ und $\beta = \frac{A-B}{2}$. Hierdurch werden jene zu:

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (27);$$

wodurch man Ausdrücke für die Summe und Differenz dieser Functionen hat.

Die vier obigen Ausdrücke ($\mathfrak{A}$) bis ($\mathfrak{D}$) geben aber, wenn sie nur umgeordnet werden, ebensolche Ausdrücke für das Product dieser Functionen; nämlich:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \quad . \quad . \quad (29)$$

$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \quad . \quad (30)$$

$$\cos\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)] \quad . \quad (31).$$

Das Product von $\sin(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha-\beta)$ gibt:
$\sin^2\alpha\,\cos^2\beta - \cos^2\alpha\,\sin^2\beta = \sin^2\alpha\,(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\,\sin^2\beta$,
oder:

$$\sin(\alpha+\beta)\,\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

und ähnlich entsteht:

$$\cos(\alpha+\beta)\,\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Leicht wird es nun dem Lernenden werden, sich den Ausdruck:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\cos\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

und dessen analoge, sowie:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

und dessen analoge zu entwickeln. Es ist dieß als Uebung zu empfehlen.

Wendet man diese eben erhaltenen Formeln auf specielle Winkel, z. B. 90^0, an, so entstehen mehrere einfache Formeln, die bei späteren Rechnungen sehr oft Reductionen veranlassen können. So gibt z. B. $A = 90^0$ gesetzt und B mit α vertauscht, die Formel (24):

$$1 + \sin\alpha = 2\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

und da nach §. 28 $\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ ist, so ergibt sich:

$$1 + \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

und ebenso gibt (25):

$$1 - \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Diese beiden Formeln haben Aehnlichkeit mit (7) und (8) des vorigen Paragraphen, weßhalb wir sie hier mit diesen zusammenordnen:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$1+\sin\alpha = 2\sin^2\left(45^0+\frac{1}{2}\alpha\right) = 2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right) \quad . \quad (36)$$

$$1-\sin\alpha = 2\cos^2\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right) \quad . \quad (37)$$

Führt man, nachdem die Wurzel ausgezogen ist, die rechte Seite von (36) aus, so entsteht, da $\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$:*)

$$\sqrt{1+\sin\alpha} = \left(\sin 45^0 \cos\frac{\alpha}{2} + \cos 45^0 \sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}$$

oder:

$$\sqrt{1+\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

und ebenso entsteht aus (37):

$$\sqrt{1-\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

Diese Formeln geben, sobald man sie quadrirt, für $\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \cos^2\frac{1}{2}\alpha$ den Werth 1 und für $2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ das $\sin\alpha$ setzt, identische Gleichungen. —

Aus (36) und (37) entsteht durch Division:

$$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Dieselben Werthe sind auch gleich $\operatorname{cotg}\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)$.

Die Formeln für $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ und $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ geben, wenn man $\alpha = 45^0$ setzt (weil $\operatorname{tg} 45^0 = 1$) und statt β dann α schreibt:

$$\operatorname{tg}(45^0+\alpha) = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}(45^0-\alpha) \quad . \; . \quad (40)$$

und:

$$\operatorname{tg}(45^0-\alpha) = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^0+\alpha) \quad . \; . \; . \quad (41).$$

Es ist nicht schwer einzusehen, daß man diese Formeln durch weitere ähnliche Verwandlungen noch beträchtlich vermehren kann. Es

*) Da $\sin 45^0 = \cos 45^0$, und $\sin^2 45^0 + \cos^2 45^0 = 1$, so ist $\sin^2 45^0 = \frac{1}{2}$

$\sin 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\operatorname{tg} 45^0 = 1$.

sei nur noch Einiges erwähnt; so haben wir z. B. in den Formeln (24) bis (27) die Summe und Differenz von $\sin\alpha$ und $\sin\beta$, sowie die Summe und Differenz von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$, wollte man aber nun z. B. den Werth $\cos\alpha + \sin\beta$ haben, so ist derselbe leicht aus (24) zu finden, indem man statt α dort nun $(90^0 - \alpha)$ schreibt, da $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ ist. Es entsteht so:

$$\cos\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(45^0 + \frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right). \quad (42)$$

u. s. w.

Sehr vervielfältigt werden natürlich diese Formeln auch dadurch, daß man alle die zwischen $\frac{1}{2}\alpha$ und α bestehenden, in solche zwischen α und 2α und umgekehrt umwandeln kann.

Wir empfehlen dem Lernenden hier noch einige Uebungen zu machen, nämlich die Richtigkeit folgender Verwandlungen nachzuweisen:

1) $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$ in: $\sin 2\alpha \sin 2\beta$.

Zerlegt man den vorgelegten Ausdruck als Differenz der Quadrate, so entsteht:

$$[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\,[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] = $$
$$= 2\sin\alpha\cos\beta\ 2\cos\alpha\sin\beta \text{ ec.;}$$

2) $\cos^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha-\beta)$ in: $-\sin 2\alpha \sin 2\beta$.

Analog 1) erhält man:

$$[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\,[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)] = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\times -2\sin\alpha\sin\beta \text{ ec.;}$$

3) $tg^2(\alpha+\beta) - tg^2(\alpha-\beta)$ in: $\dfrac{4\sin 2\alpha \sin 2\beta}{(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)^2}$.

Geht ebenfalls analog 1). —

4) $\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)$ in: $1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta$.

Setzt man hier:

$$\sin^2(\alpha+\beta) = \frac{1-\cos 2(\alpha+\beta)}{2}, \text{ und } \sin^2(\alpha-\beta) = \frac{1-\cos 2(\alpha-\beta)}{2},$$

so wird der gegebene Ausdruck zu:

$$1 - \frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}, \text{ oder} = 1 - \frac{\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\beta \sin 2\beta}{2}$$
$$- \frac{\cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta}{2} \text{ ec.}$$

5) $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta)$ in: $1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta$.

Analog dem vorigen ist: $\cos^2(\alpha+\beta) = \frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2}$, und $\cos^2(\alpha-\beta) = \frac{1+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}$; hierdurch erhält man:

$$1 + \frac{\cos 2(\alpha+\beta) + \cos 2(\alpha-\beta)}{2} \text{ etc.};$$

6) $\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta) + \mathrm{tg}^2(\alpha-\beta)$ in: $\frac{2(\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta)}{(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)^2}$.

Durch Auflösen der Tangenten in Sinus durch Cosinus wird der gegebene Ausdruck zu:

$$\frac{\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)},$$

oder:

$$\frac{(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)^2 + (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)^2}{(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)^2} \text{ etc.},$$

7) $1 + \mathrm{tg}\,\alpha$ in $\frac{\sqrt{2}\sin(45^0 + \alpha)}{\cos\alpha}$. —

Indem man statt 1 seinen Werth $\mathrm{tg}\,45^0$ setzt, entsteht nach Formel (34):

$$1 + \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\,45^0 + \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin(45^0 + \alpha)}{\cos 45^0 \cos\alpha} \text{ etc.};$$

8) $1 = \mathrm{tg}\,\alpha$ in: $\frac{\sqrt{2}\sin(45^0 - \alpha)}{\cos\alpha}$.

Wird analog 7) erhalten.

9) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha$ in: $\frac{2}{\sin 2\alpha}$ wird.

Der gegebene Ausdruck wird durch Umwandlung der Tangente und Cotangente zu: $\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ etc.;

10) $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{cotg}\,\alpha$ in: $-2\,\mathrm{cotg}\,2\alpha$.

Setzt man $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\alpha}$, so erhält man: $\frac{1-\mathrm{cotg}^2\alpha}{\mathrm{cotg}\,\alpha}$ etc.;

11) $\frac{2}{\mathrm{cotg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha}$ in: $\mathrm{tg}\,2\alpha$.

Geht analog 10).

12) $\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}$ in: $\cos 2\alpha$.

Der gegebene Ausdruck geht leicht über in: $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$ 2c.;

13) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$ in: $\sin 2\alpha$.

Setzt man $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, so ergibt sich: $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$ 2c.;

14) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma$ in: $\mathrm{tg}\,\alpha\;\mathrm{tg}\,\beta\;\mathrm{tg}\,\gamma + \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

Drückt man die Tangenten durch Sinus und Cosinus aus und bringt alsdann auf gleiche Benennung, so entsteht:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

wobei der Zähler dieses Ausdrucks gleich $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ wäre, wenn das Glied $-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ nicht fehlte; zieht man dieses daher zu und wieder ab, wodurch das Ganze unverändert bleibt, so erhält man das gesuchte Resultat.

15) $\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta + \mathrm{cotg}\gamma$ in: $\mathrm{cotg}\alpha\,\mathrm{cotg}\beta\,\mathrm{cotg}\gamma - \frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

Geht analog dem vorigen. —

16) $4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ in: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Nach Formel (28) ist:

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\left(\alpha + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right];$$

also wird der gegebene Ausdruck zu:

$$2\left[\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right]\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma), \text{ oder:}$$

$2\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - 2\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\left(\alpha + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)$; das erste verwandelt sich nach Formel (30) in: $\sin\beta + \sin\gamma$, und das letzte nach derselben Formel in: $\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin\alpha$. — Uebrigens kann man aus der ersten von den vier Aufgaben in §. 35, indem man:

$\beta + \gamma - \alpha = A$
$\alpha + \gamma - \beta = B$ und
$\alpha + \beta - \gamma = C$ setzt, dieselben Ausdrücke links und rechts wie hier oben erhalten.

17) $4 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ in: $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Geht analog 16). —

18) $4 \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ in: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

Nach Formel (29) ist:

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right].$$

Hierdurch wird der gegebene Ausdruck zu:

$$2\cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)+2\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma);$$

das erstere verwandelt sich nach Formel (29) in: $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, und das letztere nach derselben Formel in: $\cos\beta + \cos\gamma$ &c.;

19) $4 \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$ in: $\cos\beta + \cos\gamma + \cos\alpha - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

Geht analog 16). —

20) $4 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$ in: $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Der gegebene Ausdruck wird nach Formel (28):

$$[\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)]\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma],$$ oder:

$$-\cos^2\gamma+\cos\gamma[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)]-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$ &c.;

21) $4 \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$ in: $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Geht analog 20). —

22) $-4 \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$ in: $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Analog 20). —

§. 38. **Ueber die Lösung solcher Gleichungen, in welchen unbekannte Winkel vorkommen** (Goniometrische Gleichungen). Wenn der unbekannte Winkel nur in einer und derselben goniometrischen Function in der Gleichung vorkommt, so hat die Lösung nicht die ge-

ringste Schwierigkeit, sie ist, wie jede andere algebraische auch. Kommt aber der unbekannte Winkel in mehreren Functionen vor, so hat man die verschiedenen alle auf eine und dieselbe zu reduciren; es enthält alsdann die Gleichung gleichsam mehrere Unbekannten, weil ja jede Function des unbekannten Winkels selbst eine Unbekannte ist. Aber wir haben auch zur Lösung immer die nöthige Anzahl von Gleichungen, indem eine jede der bisher erhaltenen goniometrischen Formeln auf den unbekannten Winkel angewendet eine solche abgibt. Es braucht übrigens die Function, deren Werth man aus der Gleichung ausrechnet und mit deren Hülfe man aus den trigonometrischen Tafeln den Winkel auffindet, nicht schon in der Gleichung enthalten zu sein, man wählt sich im Gegentheil immer diejenige, in welche sich die in ihr vorkommenden am leichtesten verwandeln lassen, und es ist dabei einerlei, ob sie den unbekannten Winkel einfach oder doppelt, ganz oder halbirt, für sich oder noch mit bekannten verbunden, enthält.

Einige Beispiele werden dieß klarer machen:

1) Es sei die Gleichung: $\cos x = \operatorname{tg} x$ gegeben; $\operatorname{tg} x$ ist $= \frac{\sin x}{\cos x}$, also die Gleichung: $\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$, und: $\cos^2 x = \sin x$; setzt man nun statt $\cos^2 x$ den Werth, so entsteht:

$$1 - \sin^2 x = \sin x$$

und man hat so eine quadratische Gleichung in $\sin x$, welche Function in der ursprünglichen Gleichung gar nicht vorkam.

2) Die Gleichung: $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ geht über in: $\sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = 0$; da $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$ ist, so wird die Gleichung:

$$\sin x \cos x - \sin^2 x = 0, \text{ oder:}$$
$$\sin x (\cos x - \sin x) = 0,$$

woraus $\sin x = 0$ oder $x = 0$, und $\cos x = \sin x$, also $x = 45^0$ entsteht.

3) Die Gleichung: $a \sin x = \frac{b}{\cos x}$ hat man in: $a \sin x \cos x = b$ zu verwandeln, und da: $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ist, so entsteht:

$$a \sin 2x = 2b,$$

woraus $\sin 2x = \frac{2b}{a}$.

4) In der Gleichung: $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = 0$, setzt man statt $\sin x \cos x$ seinen Werth $= \frac{1}{2} \sin 2x$, und statt $\sin x + \cos x$ den entsprechenden aus Formel (38): $= \sqrt{1 + \sin 2x}$, so entsteht:

$$a \sqrt{1 + \sin 2x} + \frac{b}{2} \sin 2x = 0$$

eine Gleichung, deren Lösung nun auf algebraischem Wege erfolgt.

5) In der Gleichung: $\frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin x \cos x} + \frac{a}{\cos^2 x} = c$ bringt man die Nenner weg und hat:

$$a (\sin^2 x + \cos^2 x) + b \sin x \cos x = c \sin^2 x \cos^2 x$$

oder wenn für $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ gesetzt wird:

$$a + \frac{b}{2} \sin 2x = \frac{c}{4} \sin^2 2x \text{ etc.}$$

6) Die Gleichung: $a = \frac{b}{\sin \alpha} (\sin (\alpha + x) + \sin \alpha)$ löst man ohne Weiteres, indem man den $\sin (\alpha + x)$ als Unbekannte betrachtet; man hat dann mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln den Werth $\alpha + x$ zu suchen und um α zu vermindern, damit man x erhalte. —

7) Die Gleichung: $a = \frac{b}{\sin x} [\sin (\alpha + x) - \sin x]$ verwandelt sich durch Auflösen des Werthes: $\sin (\alpha + x)$, (es ist dieß nothwendig, da die Unbekannte mit α verbunden und auch ohne dieß vorkommt) und Ordnen in:

$$a = b \left(\sin\alpha \frac{\cos x}{\sin x} + \cos \alpha - 1\right)$$

in welcher Gleichung die Unbekannte nur als $\operatorname{cotg} x$ enthalten ist. —

8) Aehnlich ist die Gleichung: $= a \frac{b}{\sin x} (\sin (\alpha + x) - \sin \alpha)$ zu behandeln, es entsteht:

$$a = b \left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)$$

da aber $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ ist, so wird die Gleichung zu:

$$a = b (\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x)$$

und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ die Unbekannte. —

9) Aehnlich wird:

$$a = \frac{b}{\cos x} [\sin(\alpha + x) + \cos \alpha]$$

zu $a = b \left[\cos \alpha \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right) + \sin \alpha\right]$;

$\frac{1 + \sin x}{\cos x}$ ist nun $= tg(45^0 + \frac{1}{2} x)$ und die Unbekannte. —

10) Ebenso ist die Gleichung:

$$a = \frac{b}{\sin \alpha} [\sin(\alpha + x) + \sin x]$$

zu behandeln; sie wird:

$$a = b \left[\cos x + \sin x \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)\right].$$

Da aber $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cotg \frac{1}{2} \alpha$ ist, so entsteht:

$$a = b (\cos x + \sin x \cotg \tfrac{1}{2} \alpha),$$

eine Gleichung, die freilich noch $\sin x$ und $\cos x$ enthält; Größen, deren Elimination Wurzeln herbeiführte und das Quadriren nothwendig machte. Multiplicirt man aber die ganze Gleichung mit $\sin \frac{1}{2} \alpha$, so entsteht:

$$a \sin \tfrac{1}{2} \alpha = b (\cos x \sin \tfrac{1}{2} \alpha + \sin x \cos \tfrac{1}{2} \alpha),$$

wo die Größe in der Klammer der Ausdruck für $\sin(\frac{1}{2} \alpha + x)$ ist und dieser Werth die Unbekannte der Gleichung bildet. Es ist also:

$$\sin(\tfrac{1}{2} \alpha + x) = \frac{a}{b} \sin \tfrac{1}{2} \alpha.$$

11) Die Gleichung:

$$a = \frac{b}{\cos \alpha} [\sin(\alpha + x) + \cos x]$$

wird zu:

$$a = b \left(\frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha} \cos x + \sin x\right),$$

wo $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = tg(45^0 + \frac{1}{2} \alpha)$ ist; wenn dann die Gleichung mit $\cos(45^0 + \frac{1}{2} \alpha)$ multiplicirt wird, so entsteht der Ausdruck: $\sin(45 + \frac{1}{2} \alpha) \cos x + \cos(45 + \frac{1}{2} \alpha) \sin x$, der als Werth gleich $\sin(45^0 + \frac{1}{2} \alpha + x)$ ist und die Unbekannte abgibt.

12) Ausdrücke wie:

$$\frac{\sin(x + \alpha)}{\sin(x - \alpha)} = m$$

behandelt man, statt den Nenner wegzubringen und aufzulösen, als Proportionen und bildet sie um in:

$$\frac{\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)-\sin(x-\alpha)}=\frac{m+1}{m-1},$$

was dann in:

$$\frac{\sin x \cos\alpha}{\cos x \sin\alpha}=\frac{m+1}{m-1} \text{ oder } \operatorname{tg} x \operatorname{cotg}\alpha=\frac{m+1}{m-1}$$

übergeht; wo $\operatorname{tg} x$ die Unbekannte wird. —

13) Dieses Verfahren geht auch bei Gleichungen, wie:

$$\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)}=m$$

an, nur muß man nach der Form:

$$\frac{\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha)-\sin(x+\beta)}=\frac{m+1}{m-1}.$$

Die Formeln (24) und (25) zu Hülfe nehmen, indem man $A=x+\alpha$ und $B=x+\beta$ setzt; es entsteht so:

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{m+1}{m-1}$$

wo nun $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ die Unbekannte abgibt. —

14) Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Gleichungen von der Form:

$$a\sin x+b\cos x=c.$$

Wollte man das $\sin x$ durch $\cos x$, oder umgekehrt, ausdrücken, so wäre nachträglich ein Quadriren nothwendig; dieß vermeidet man durch ein Verfahren, das dem unter 10) und 11) eingeschlagenen ähnlich ist. Es muß dann aber hier ein der Aufgabe fremder Winkel, der Hülfswinkel genannt wird, eingeführt werden. Dividirt man die ganze Gleichung nämlich mit a, so entsteht:

$$\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}.$$

Hätten wir nun den Coefficienten von $\cos x$ hier wie unter 10) als Tangente eines bekannten Winkels, so ließe sich ein Verfahren anwenden, das jenem ähnlich. Es hindert uns aber nichts den Bruch $\frac{b}{a}$, jenen Coefficienten, gleich der Tangente irgend eines Winkels zu setzen, da die Tangenten der Winkel zwischen 0^0 und 90^0 alle Werthe zwischen

0 und $\frac{1}{0}$ annehmen. Setzen wir daher dieß $\frac{b}{a} = tg\,\varphi$, wo dann durch diese Gleichung der Winkel φ ein bekannter ist, so wird durch Einführung dieses Werthes unsere Aufgabe zu:

$$\sin x + tg\,\varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

oder analog 10) zu:

$$\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi = \frac{c}{a} \cos\varphi,$$

oder endlich zu:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos\varphi;$$

aus welchem Ausdruck x durch den bekannten Winkel φ berechnet wird. —

15) Aus zwei Gleichungen der Art, wie:

$$a x + b = \sin y$$
$$c x + d = \cos y$$

eliminirt man erforderlichen Falls das y am besten, indem man beide Gleichungen quadrirt und dann addirt; weil $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$. Stünden das sin y und das cos y nicht so wie oben für sich allein auf der rechten Seite der Gleichung, so wären sie dahin zu bringen.

16) Die Gleichungen mit zwei unbekannten Winkeln x und y, deren Summe α man kennt, löst man am besten, wenn sie auf die Form:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = m$$

gebracht werden können, ohne daß man für y den Werth $\alpha - x$ substituirt, durch eine Behandlung ähnlich 12). Es wird so:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{m + 1}{m - 1},$$

oder:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)}{\cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{m + 1}{m - 1},$$

oder endlich:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\alpha\, cotg\,\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{m + 1}{m - 1};$$

wo cotg (x — y) die Unbekannte abgibt. Weiß man x — y, so ist auch, da $x + y = \alpha$ gegeben ist, x und y selbst bekannt.

Wir empfehlen zur Uebung noch folgende Gleichungen zu lösen:

1) $a = b\,[tg(\alpha + x) + tg(\alpha - x)]$

2) $a = b\,[tg(\alpha + x) - tg\,x]$

3) $a = b\,[\cos^2(\alpha+x) + \cos^2(\alpha-x)]$
4) $a = b\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$; $x+y = \alpha$
5) $a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y$; $x + y = \alpha$
6) $a = b \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$; $x - y = \alpha$.

Anmerk. Gleichungen der Art, wie: $a\,x = b + c \sin x$, wo x als Bogen des Winkels betrachtet werden muß, dessen Sinus zugleich vorkommt, können nicht auf Wegen, die sich auf das hier Gehabte stützen, aufgelöst werden, weil hier die Verwandlung einer Function in den Bogen oder umgekehrt, nicht möglich.

§. 39. **Die Construction der trigonometrischen Tafeln.** Wir haben schon in dem §. 23 gezeigt, daß man mit Hülfe der algebraischen Geometrie (§. 9) eine große Reihe von Sinus und Cosinus, und somit auch der übrigen Functionen berechnen kann; wie dieß aber für alle möglichen Winkel angeht, leuchtet nach dem dortigen Verfahren nicht ein. Man könnte sich zwar begnügen, die einmal vorhandenen, berechneten Tafeln anzunehmen und sich ihrer als Hülfsmittel, ähnlich wie der Logarithen für Zahlenrechnungen, bei Lösung der trigonometrischen Aufgaben bedienen, es ist aber doch wohl geziemend, hier wenigstens anzudeuten, wie die Berechnung statthaben könnte.

Denken wir uns deßhalb die Aufgabe gestellt: eine Tafel zu berechnen, worin die trigonometrischen Functionen aller Winkel von einer Minute an und von Minute zu Minute fortschreitend aufgezeichnet sind. —

Man kann sich hier, ist einmal der $\sin 1'$ und $\cos 1'$ bekannt, folgender einfachen Formeln zur weiteren Rechnung bedienen; setzt man nämlich in dem Werth:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta$$

$\alpha = m\,A$ und $\beta = A$, so entsteht durch Ordnen:

$$\sin(m+1)\,A = 2 \sin m\,A \cos A - \sin(m-1)\,A,$$

und ebenso entsteht aus: $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$

$$\cos(m+1)\,A = 2 \cos m\,A \cos A - \cos(m-1)\,A.$$

Setzt man nun m nach und nach $= 1, 2, 3 \ldots\ldots$, so entsteht einmal:

$$\sin 2\,A = 2 \sin A \cos A,$$
$$\sin 3\,A = 2 \sin 2\,A \cos A - \sin A$$
$$\sin 4\,A = 2 \sin 3\,A \cos A - \sin 2\,A \text{ ꝛc.}$$

und dann:

$$\cos 2\,A = 2 \cos A \cos A - 1$$
$$\cos 3\,A = 2 \cos 2\,A \cos A - \cos A$$
$$\cos 4\,A = 2 \cos 3\,A \cos A - \cos 2\,A \text{ ꝛc.}$$

d. h. wenn irgend ein Glied der Reihen sin A, sin 2 A, sin 3 A, sin 4 A .... und cos A, cos 2 A, cos 3 A, cos 4 A .... mit x, daß folgende mit y und das darauf folgende mit z bezeichnet wird, so besteht allgemein die Gleichung:

$$z = y \cos A - x,$$

durch welche jedes Glied aus den beiden vorhergehenden sich ergibt. — Natürlich werden bei dieser Rechnungsweise sich die allenfalls vorfallenden Fehler in die folgenden Glieder übertragen; es liefert aber die Sinusreihe des §. 9 der algebraischen Geometrie hier von Zeit zu Zeit eine passende Controlle.

Es bliebe nun nur noch nachzuweisen, wie der Sinus und Cosinus der Grundeinheit der Tafeln, hier 1′, gefunden wird. — Man geht von demselben Grundsatz aus, der in der Elementargeometrie zur Ermittlung der Zahl π angewendet wurde, von dem nämlich, daß für sehr kleine Bogen die Sehne mit dem Bogen, resp. die halbe Sehne, der Sinus des halben Winkels, mit dem Bogen desselben sehr nahe, d. h. bis auf jede beliebige Anzahl von Dezimalstellen, übereinstimmt, wenn man nur die zugehörigen Winkel klein genug annimmt. Wir wenden so die genügend genau ermittelte Zahl π wieder rückwärts an, um aus ihr den Sinus irgend eines kleinen Winkels zu berechnen.

Nur ist es nothwendig, sich vorher zu überzeugen, bis auf wieviel Decimalstellen der Bogen mit dem Sinus in Uebereinstimmung kommt. Zu dem Ende wissen wir zwar, daß $\sin\alpha$ kleiner als α ist (wo α die Länge des Bogens bedeutet), aber wir wissen nicht wieviel kleiner es ist. Gehen wir nun von

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha > \tfrac{1}{2}\alpha$$

aus und multipliciren beide Seiten der Ungleichheit mit $2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha$, so entsteht:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha > \alpha \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

oder:

$$\sin\alpha > \alpha\,(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha),$$

da man aber auf der kleineren Seite in dem negativen Glied statt des $\sin \frac{1}{2}\alpha$ die Größe $\frac{1}{2}\alpha$ setzen darf, so wird:

$$\sin\alpha > \alpha(1 - \tfrac{1}{4}\alpha^2)$$

oder:

$$\sin\alpha > \alpha - \tfrac{1}{4}\alpha^3,$$

d. h. $$\alpha - \sin\alpha < \tfrac{1}{4}\alpha^3,$$

der Unterschied zwischen $\sin\alpha$ und α beträgt nicht die Größe $\frac{1}{4}\alpha^3$.

Man kann also hiernach leicht die Anzahl von Dezimalstellen feststellen, bis auf welche α und $\sin\alpha$ übereinstimmen. Z. B. für $\alpha = 1'$ ist der Bogen α, für den Radius $= 1$, gleich $\frac{\pi}{180.60} = 0{,}00029..$, also $\frac{1}{4}\alpha^3$ noch nicht $= 0{,}00000000001$, jedenfalls ist also $\sin 1' =$ Bogen $1'$ bis auf elf Dezimalstellen genau; für den Winkel $= 30'$ ist der Bogen $\alpha = 0{,}008727$, also $\frac{1}{4}\alpha^3 = 0{,}00000016$ und der Sinus von $30' = 0{,}008727$ genau anzunehmen. —

Viertes Capitel.

Ebene Trigonometrie.

§. 40. **Formeln zwischen den drei Winkeln des Dreiecks.** Da die Summe der drei Winkel des Dreiecks, die wir immer mit A, B und C bezeichnen wollen, gleich 180^0 ist, so ist also jeder Dreieckswinkel Supplementwinkel zur Summe der beiden andern und die Hälfte jedes Dreieckswinkels Complementwinkel zur halben Summe der beiden andern. Es ist also: $B + C = 180 - A$ und $\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$, daher auch:

$$\left.\begin{aligned} \sin(B+C) &= \sin A \\ \cos(B+C) &= -\cos A \\ \operatorname{tg}(B+C) &= -\operatorname{tg} A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ꝛc.

aber auch:

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) &= \cos\frac{A}{2} \\ \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) &= \sin\frac{A}{2} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right) &= \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Während:

$\sin(A+B+C) = 0$, $\cos(A+B+C) = -1$, $\operatorname{tg}(A+B+C) = 0$ ꝛc.

und:

$\sin\frac{1}{2}(A+B+C) = 1$, $\cos\frac{1}{2}(A+B+C) = 0$ u. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B+C) = \frac{1}{0}$ ist ꝛc.

Wendet man diese Sätze an, so kann man viele Ausdrücke, in welchen die Functionen der Winkel eines Dreiecks vorkommen, auf sehr einfache Formen bringen. So ist z. B.

$$\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}(A+B) =$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B,$$

wenn man $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ entwickelt und reducirt. —

Aehnlich wird:

$$\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B.$$

der Ausdruck:

$\sin A + \sin B + \sin C$ wird $= 4\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C$*) . . (3)

denn es ist:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(A+B) =$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B) \cos\tfrac{1}{2}(A-B) + 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B) =$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)[\cos\tfrac{1}{2}(A-B) + \cos\tfrac{1}{2}(A+B)] =$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}C \; 2\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B.$$

Ganz analog ist:

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$$

und: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$ (4).

Sodann wird:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} =$$

$$= \frac{\sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C}{\cos A \cos B \cos C};$$

der Zähler dieses Bruches wäre der Werth für $\sin(A+B+C)$, wenn das Glied $-\sin A \sin B \sin C$ nicht fehlte. Addirt man es daher mit dem — und dem + Zeichen zu, so wird der Bruch zu:

$$\frac{\sin(A+B+C) + \sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C};$$

da aber $\sin(A+B+C) = 0$ ist, so entsteht:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Analog ist:

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}$$

und:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{1 + \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}$$

---

*) Folgt auch leicht aus Aufgabe 16 des §. 37, wenn $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ gesetzt wird. Aehnlich verhalten sich die analogen Aufgaben des §. 37 zu den obigen Formeln 4) 5) und 6).

sodann:

$$\cotg \tfrac{1}{2} A + \cotg \tfrac{1}{2} B + \cotg \tfrac{1}{2} C = \cotg \tfrac{1}{2} A \cotg \tfrac{1}{2} B \cotg \tfrac{1}{2} C \quad . \quad . \quad (6).$$

$$\begin{aligned} \tg \tfrac{1}{2} A \tg \tfrac{1}{2} B + \tg \tfrac{1}{2} A \tg \tfrac{1}{2} C + \tg \tfrac{1}{2} B \tg \tfrac{1}{2} C &= \\ = \tg \tfrac{1}{2} A (\tg \tfrac{1}{2} B + \tg \tfrac{1}{2} C) + \tg \tfrac{1}{2} B \tg \tfrac{1}{2} C &= \\ = \cotg \tfrac{1}{2} (B + C) (\tg \tfrac{1}{2} B + \tg \tfrac{1}{2} C) + \tg \tfrac{1}{2} B \tg \tfrac{1}{2} C &= \\ = \frac{1 - \tg \tfrac{1}{2} B \tg \tfrac{1}{2} C}{\tg \tfrac{1}{2} B + \tg \tfrac{1}{2} C} (\tg \tfrac{1}{2} B + \tg \tfrac{1}{2} C) + \tg \tfrac{1}{2} B \tg \tfrac{1}{2} C &= 1. \end{aligned}$$

Aehnlich ist:

$$\cotg A \cotg B + \cotg A \cotg C + \cotg B \cotg C = 1.$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist:

$$\sin 2B = \sin 2C$$
$$\cos 2B = -\cos 2C,$$

wenn A der rechte Winkel.

§. 41. **Formeln zwischen den Functionen der Winkel und den Linien im rechtwinkligen Dreieck.** Wir hatten von vornherein im §. 24, daß:

$$\frac{b}{a} = \sin B,$$

$$\frac{c}{a} = \cos B,$$

$$\frac{b}{c} = \tg B$$

und:
$$\frac{c}{b} = \cotg B$$

ist, wo a die Hypothenuse, b und c die Katheten und B der der Kathete b gegenüberliegende Winkel ist.

Wir haben aber auch:

$$\frac{b}{a} = \cos C,$$

$$\frac{c}{a} = \sin C,$$

$$\frac{b}{c} = \cotg C$$

und:
$$\frac{c}{b} = \tg C.$$

Es ist also:

$$b = a \sin B = a \cos C$$

und:
$$c = a \sin C = a \cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7);$$

oder in Worten: Jede Kathete ist gleich der Hypothenuse multiplicirt mit dem Sinus des ihr gegenüberliegen=

den oder dem Cosinus des ihr anliegenden Winkels; und umgekehrt: die Hypothenuse ist gleich einer Kathete dividirt durch den Sinus des ihr gegenüberliegenden oder den Cosinus des ihr anliegenden Winkels.

Weiter geht aus dem Obigen hervor:

$$\left.\begin{array}{l} b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C \\ c = b \operatorname{cotg} B = b \operatorname{tg} C \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Oder: Eine Kathete ist gleich der andern Kathete multiplicirt mit der Tangente des der ersteren gegenüberliegenden (oder der letzteren anliegenden) Winkels.

Die Höhe h, welche von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällt ist, wird:

$$h = b \sin C, \text{ oder } = c \sin B,$$

woraus mit Hülfe von 7):

$$h = a \sin B \sin C = \frac{a \sin 2B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Hierdurch wird nun der Flächeninhalt:

$$f = \frac{a\,h}{2} = \frac{a\,b \sin C}{2} = \frac{a\,c \sin B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

oder auch:

$$f = \frac{b\,c}{2} = \frac{b^2}{2} \operatorname{cotg} B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10^a)$$

und: $$f = \frac{a^2}{4} \sin 2B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10^b).$$

Der Radius R des umschriebenen Kreises ist $= \frac{a}{2}$ und der Radius r des eingeschriebenen Kreises geht aus Fig. (34) folgendermaßen hervor:

$$x = r \operatorname{cotg} \frac{B}{2}$$

$$y = r \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$

da nun $x + y = a$, so ist:

$$a = r\left(\operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}\right) = \frac{r \sin \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

und endlich, da $\sin\frac{B+C}{2} = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist:

$$r = a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cdot \sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Man kann nun leicht aus den Grundformeln (7) durch Verwandlung noch andere herleiten: so z. B. aus:

$\frac{b}{a} = \cos C$ entsteht:

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \cos C = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} C \quad \ldots \quad (12)$$

und:

$$\frac{a-b}{a} = 1 - \cos C = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} C \quad \ldots \quad (13)$$

und aus $\frac{b}{a} = \sin B$:

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \sin B = 2\cos^2 (45^0 - \tfrac{1}{2} B) \quad . \quad (12^*)$$

$$\frac{a-b}{a} = 1 - \sin B = 2\sin^2 (45^0 - \tfrac{1}{2} B) \quad . \quad (13^*)$$

endlich aus 12) und 13):

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Schreibt man die ersten Gleichungen:

$$\frac{b}{a} = \sin B$$

und

$$\frac{c}{a} = \sin C$$

in der Form:

$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

so entsteht daraus leicht:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1+\sin B}{\sin C} = \frac{1+\cos C}{\sin C}$$

oder:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2\cos^2 \frac{1}{2} C}{2\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

und:

$$\frac{a-b}{c} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Weiter aus:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B \text{ entsteht:}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{1+\operatorname{tg} B}{1-\operatorname{tg} B} = \operatorname{tg}(45^\circ + B) \quad \ldots \ldots (17)$$

u. s. w.

Aehnliche Formeln kann der Lernende sich eine ganze Reihe entwickeln.

§. 42. Formeln zwischen den Functionen der Winkel und den Linien im schiefwinkligen Dreieck. Wie wir in der algebraischen Geometrie viele Formeln für das schiefwinklige Dreieck dadurch erhielten, daß wir es durch eine Höhe in zwei rechtwinklige zerlegten und auf diese die bekannten Formeln des rechtwinkligen Dreiecks anwendeten, ebenso werden wir auch hier in der Trigonometrie verfahren.

Es sei vorher ein für alle mal festgesetzt, daß der Winkel mit demselben Buchstaben, wie die ihm gegenüberliegende Seite bezeichnet wird, nur sollen diese Winkelbuchstaben aus dem großen Alphabet, während die Seiten, wie in der algebraischen Geometrie üblich war, aus dem kleinen genommen werden.

Aus Fig. (35) ist leicht ersichtlich, daß in den beiden rechtwinkligen Dreiecken die Formeln:

$$h = a \sin C$$

und:

$$h = c \sin A,$$

sowie:

$$m = a \cos C$$

und:

$$n = c \cos A$$

und endlich:

$$\operatorname{tg} A = \frac{h}{n} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{h}{m}$$

bestehen. Setzen wir die beiden ersten in h einander gleich, so entsteht:

$$a \sin C = c \sin A$$

oder: $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C};$$

offenbar würde ebenso, wenn man die Höhe von A auf a gefällt hätte, entstanden sein:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Es ist also:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

Oder: die drei Seiten stehen zu den Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel in constantem Verhältniß.

Aus den beiden andern obigen Gleichungen in m und n entsteht durch Addition:

$$m + n = b = a \cos C + c \cos A,$$

eine Formel, in welcher fünf Stücke des Dreiecks vorkommen. Suchen wir mit Hülfe der obigen Formel (18) den Winkel A zu eliminiren, so ist zuerst unserer Gleichung die Form:

$$b - a \cos C = c \cos A$$

zu geben und dann die obige als:

$$a \sin C = c \sin A$$

zu Hülfe zu nehmen.

Verfahren wir hier nach §. 38. 15), d. h. quadriren wir beide Gleichungen und addiren, so ist:

$$b^2 + a^2 (\cos^2 C + \sin^2 C) - 2ab \cos C = c^2 (\cos^2 A + \sin^2 A)$$

oder:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19).^{*)}$$

Ebenso besteht die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (19^*)$$

Oder: das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern minus dem doppelten Producte dieser, multiplicirt mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

---

*) Man kann diese Formel auch dadurch erhalten, daß man die obige:

$$b = a \cos C + c \cos A$$

mit ihren beiden analogen:

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$c = a \cos B + b \cos A$$

ansetzt und zwischen diesen dreien, zwei der Winkel eliminirt; indem man z. B. die erste mit b, die zweite mit a die dritte mit c multiplicirt und die Summen der beiden letzteren von der ersten abzieht. Auch kann man dieselbe Formel aus den beiden in (18) enthaltenen mit Hülfe von $A+B+C = 180^\circ$ oder vielmehr mit $\cos B = -\cos (A+C)$ entwickeln. — Wir überlassen dieß als Uebung dem Lernenden.

Leicht hätte man auch diese Formel aus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn,$$

die in der algebraischen Geometrie, §. 4, 10, vorkommt, mit Hülfe der einen von den obigen nämlich:

$$n = c \cos A$$

erhalten.

Aus:

$$\operatorname{tg} A = \frac{h}{n}$$

endlich, hat man, da $h = a \sin C$ und

$$n = b - m$$

oder: $n = b - a \cos C$ ist:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Wäre nun aber einer der Winkel des Dreiecks, z. B. A, ein stumpfer und dessen Außenwinkel $= A'$, so wäre nach Fig. (36):

$$h = c \sin A'$$

und:

$$h = a \sin C$$

also:

$$c \sin A' = a \sin C$$

daher:

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{c}{\sin C};$$

eine Formel, welche mit (18) übereinstimmte, wenn nicht der Sinus des spitzen Außenwinkels A' darin vorkäme; da aber $A = 180 - A'$, also $\sin A = \sin A'$ ist, so können wir statt des $\sin A'$ dieser den $\sin A$ der Formel (18) gelten lassen, und haben so diese letztere als allgemein gültige.

Ebenso ist es mit der Formel (19); die algebraische Geometrie gibt nämlich in dem Falle, daß A stumpf ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

und nach Fig. (36) ist:

$$n = c \cos A'$$

woraus folgt:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A'.$$

Da aber $-\cos A = \cos A'$, so ist auch dieser Fall in der Formel (19) enthalten, und die beiden Formeln (18) und (19), die

Grundformeln der Trigonometrie, gelten für alle Fälle, mag auch ein Winkel des Dreiecks ein stumpfer sein oder nicht. *)

Man kann nun durch Umwandlung aus diesen Gleichungen (18) und (19) eine Menge weiterer und ganz anwendbarer Formeln erzeugen.

So z. B. zuerst aus (18):

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}$$

und, da:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \cos \tfrac{1}{2} C \text{ ist:}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C} \quad \ldots\ldots \quad (21);$$

und ebenso:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}$$

und da:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \sin \tfrac{1}{2} C \text{ ist:}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Durch Division von (21) und (22) entsteht:

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Auf ähnliche Weise können weiter aus (18) erhalten werden:

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A}$$

und wenn man die Formel (3) des §. 40 benützt:

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}$$

---

*) Sie gelten auch für den Fall, wo der Winkel $A = 90^\circ$, da $\sin 90^\circ = 1$ und $\cos 90^\circ = 0$; es geht dann (18) über in:

$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

was wie bekannt richtig;

und (19) geht über in:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ oder:}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

im letztern Falle entsteht, weil $b^2 = a^2 - c^2$ ist:

$$a^2 - c^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \text{ und}$$
$$c = a \cos B, \text{ was alles ebenfalls richtig.}$$

oder:

$$\frac{a + b + c}{a} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} A} \quad . \; . \; . \quad (24)$$

und ähnlich:

$$\frac{a + b - c}{a} = \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A}$$

und wenn man die auf (3) folgende Formel des §. 40 benützt:

$$\frac{a + b - c}{a} = \frac{4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A},$$

oder:

$$\frac{a + b - c}{a} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A}.$$

Die Division dieses Resultats durch (24) liefert:

$$\frac{a + b - c}{a + b + c} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

Aehnliche Formeln wird man sich leicht noch weiter durch Behandlung der Formel (18) verschaffen können.

Aus der Formel (19) folgt zunächst:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}.$$

Dieser Ausdruck ist jedoch durch die drei Quadrate im Zähler zu unbequem, um zur Berechnung von cos A zu dienen; wenn man aber 1 auf beiden Seiten der Gleichung zufügt, so entsteht:

$$1 + \cos A = \frac{2 b c + b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}$$

die linke Seite ist nun $= 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$ und
die rechte Seite $= (a + b + c)(b + c - a)$,
also:

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4 b c}.$$

Wenn nun wieder $\frac{a + b + c}{2}$, wie in der algebraischen Geometrie $= s$ gesetzt wird, so entsteht:

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{s (s - a)}{b c} \text{ und}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s (s - a)}{b c}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Zieht man beide Seiten der obigen Gleichung in $\cos A$ von 1 ab, statt daß man ihnen 1 zuzählt, so entsteht:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc}$$

und endlich:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Aus (25) und (26) folgt:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

und:

$$\sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (28).$$

Aus (19) folgt auch:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} B), \text{ oder:}$$

$$b^2 = (a - c)^2 + 4ac \sin^2 \tfrac{1}{2} B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

und:

$$b^2 = (a + c)^2 - 4ac \cos^2 \tfrac{1}{2} B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Die Höhe h hat man Fig. (35) als Kathete:

$$h = a \sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

und wenn man dieselbe durch die Seite b, auf der sie senkrecht steht, ausdrücken will, da a nach (18) $= \frac{b \sin A}{\sin B}$, ist:

$$h = \frac{b \sin A \sin C}{\sin B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Aus (31) folgt der Flächeninhalt:

$$f = \frac{bh}{2} = \frac{ab \sin C}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

und aus (32):

$$f = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Eine Formel zwischen einer Seite, den beiden anliegenden Winkeln und dem Radius r des eingeschriebenen Kreises erhält man aus Fig. (36) durch:

$$v = r \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$

$$w = r \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

also:

$$v + w = b = r\left(\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}\right)$$

woraus folgt:

$$r = \frac{b \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{1}{2}(A + C)}$$

oder:

$$r = \frac{b \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{1}{2} B} \quad \ldots\ldots \quad (35).$$

Der Radius R des dem Dreieck umschriebenen Kreises drückt sich durch eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel aus. Es ist nämlich Fig. (37) in dem rechtwinkligen Dreieck CDA der Winkel bei D gleich dem Winkel B unseres Dreiecks ABC und $CD = 2R$; also die Kathete:

$$AC = b = 2R \sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Der Lernende mag nun als Uebung noch folgende Ausdrücke entwickeln:

1) $(a + c)^2 = b\,(b + 2h \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B)$, oder $= b^2 + 4f \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B$.

Aus Formel (30):

$$b^2 = (a + c)^2 - 4ac \cos^2 \tfrac{1}{2} B,$$

entsteht, da $ac \sin B = 2f$ oder $= bh$ ist, wenn man für ac den Werth $= \dfrac{f}{\sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B}$ oder $= \dfrac{bh}{2 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B}$ einsetzt:

$$b^2 = (a + c)^2 - 2bh \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B, \text{ und}$$

$$b^2 = (a + c)^2 - 4f \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B \text{ ꝛc.} -$$

2) $(a - c)^2 = b\,(h - 2h \operatorname{tg} \frac{1}{2} B)$, oder $= b^2 - 4f \operatorname{tg} \frac{1}{2} B$.

Geht analog der ersten Aufgabe aus der Formel (29) hervor.

3) $b^2 = (a + c)^2 \sin^2 \frac{1}{2} B + (a - c)^2 \cos^2 \frac{1}{2} B$.

Schreibt man die Formeln (21) und (22) unter der Form:

$$(a + c) \sin \tfrac{1}{2} B = b \cos \tfrac{1}{2}(A - C), \text{ und}$$

$$(a - c) \cos \tfrac{1}{2} B = b \sin \tfrac{1}{2}(A - C)$$

und quadrirt beide, so entsteht:

$$(a + c)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} B + (a - c)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} B = b^2,$$

weil $\sin^2 \frac{1}{2}(A - C) + \cos^2 \frac{1}{2}(A - C) = 1$ ist. —

Der vorgelegte Ausdruck kann auch leicht aus Formel (29) und (30) entstehen.

4) $(a+b+c)(a+c-b) = 4ac \cos^2 \frac{1}{2} B$, oder $= 4f \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B$.
Entsteht leicht aus Formel (30) oder dem Resultat der Aufgabe 1).

5) $(a+b-c)(b+c-a) = 4ac \sin^2 \frac{1}{2} B$, oder $= 4f \operatorname{tg} \frac{1}{2} B$.
Entsteht ebenso aus Formel (29) oder dem Resultat der Aufgabe 2).

6) $\frac{f}{s^2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$

Schreibt man das Resultat der Aufgabe 4) als:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{4f}{2s \cdot 2(s-b)} = \frac{f}{s(s-b)}$$

ebenso:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{f}{s(s-a)}$$

und:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{f}{s(s-c)},$$

so entsteht durch Multiplication der drei der Ausdruck der Aufgabe, weil:

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = f^2 \text{ ist.}$$

Sehr leicht kann man diesen Ausdruck auch aus der Formel:

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B,$$

welche oben vorkommt, entwickeln; es entsteht dann:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3} = \frac{f^2}{s^4} \text{ etc.};$$

7) $\frac{2s}{h} = \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C}$; (h auf b senkrecht).

Aus Formel (24) angeschrieben, als:

$$\frac{a+b+c}{b} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} B}$$

und aus (32) unter der Form:

$$\frac{b}{h} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C} = \frac{\sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B}{2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C}$$

entsteht d rch Multiplication beider:

$$\frac{a+b+c}{h} = \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C} \text{ etc.} —$$

8) $\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin (A - C)}{\sin B}$

entsteht aus den Formeln (21) und (22). Schreibt man nämlich beide unter der Form:

$$\frac{a + c}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - C)}{\sin \frac{1}{2} B} \text{ und:}$$

$$\frac{a - c}{b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - C)}{\cos \frac{1}{2} B},$$

so ergibt sich durch Multiplication:

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-C) \cos \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B} = \frac{\sin (A-C)}{\sin B}. —$$

9) $\frac{b}{m - n} = \frac{\sin B}{\sin (A-C)}$ (m und n Segmente von b).

Da in dem Ausdruck der Aufgabe 8):

$a^2 - c^2 = m^2 - n^2$ [algebraische Geom. §. 4, Formel (8)]

und: $m^2 - n^2 = b(m - n)$ ist,

so entsteht durch Reduction der Ausdruck dieser Aufgabe.

10) $\frac{m - n}{a + c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-C)}{\cos \frac{1}{2} B}$ (m und n Segmente von b).

Multiplicirt man den Ausdruck der Aufgabe 9) mit Formel (21) unter der Form:

$$\frac{a + c}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2} B},$$

so erhält man:

$$\frac{a + c}{m - n} = \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2}(A-C)}.$$

11) $\frac{\sin B''}{\sin B'} = \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$; wo B' und B'' die beiden Winkel sind, in welche der Winkel B durch die Transversale BE zur Seite AC Fig. (4) zerlegt wird.

Nennt man die beiden Supplementwinkel, welche die Transversale mit AC bildet, (links) α und (rechts) α', so ist:

$$\frac{\frac{1}{2} b}{c} = \frac{\sin B'}{\sin \alpha} \text{ und:}$$

$$\frac{\frac{1}{2} b}{a} = \frac{\sin B''}{\sin \alpha'},$$

woraus der Ausdruck durch Division entsteht, weil $\sin \alpha = \sin \alpha'$. —

12) $\cos \frac{1}{2} B = \frac{(a+c)\ k}{2\,a\,c}$,

wo k, wie in §. 7 der algebraischen Geometrie, die Länge der Halbirungslinie eines Winkels von dem Scheitel bis zur gegenüberliegenden Seite gerechnet, bedeutet.

Geht man zur Formel (24) des §. 6 der algebraischen Geometrie:

$$k^2 = a c \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)$$

zurück, so entsteht:

$$\frac{k^2}{a c} = 1 - \frac{b^2}{(a+c)^2} \text{ und:}$$

$$\frac{(a+c)^2\ k^2}{a c} = (a+c)^2 - b^2.$$

Nun ist aber nach Formel (30):

$$(a+c)^2 - b^2 = 4 a c \cos^2 \tfrac{1}{2} B, \text{ also:}$$

$$\frac{(a+c)^2\ k^2}{a c} = 4 a c \cos^2 \tfrac{1}{2} B \text{ ꝛc. —}$$

Mit Hülfe des Flächeninhalts der beiden Theile f′ und f″ des Dreiecks und dem f des ganzen hat man auch:

$$2 f' = a k \sin \tfrac{1}{2} B,$$

und:

$$2 f'' = c k \sin \tfrac{1}{2} B,$$

und endlich:

$$2 f = a c \sin B.$$

Da aber: $2 f = 2 f' + 2 f''$ ist, so erhält man:

$$a c \sin B = (a + c)\ k \sin \tfrac{1}{2} B \text{ ꝛc.}$$

13) $\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C.$

Aus Formel (35) und (36) entsteht:

$$\frac{r}{R} = \frac{b \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} B} \cdot \frac{2 \sin B}{b} \text{ ꝛc.}$$

14) $f = 4 R^2 \sin A \sin B \sin C.$

Nach Formel (33) ist:

$$f = \frac{a\ b \sin C}{2}$$

und nach (36):

$$b = 2 R \sin B \text{ und:}$$

$$a = 2 R \sin A,$$

was durch Substitution den Ausdruck der Aufgabe ergibt. —

15) $f = 4 R\ r \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C.$

Geht wie 13) aus (35) und (36) hervor:

$$R\ r = \frac{b \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} B} \cdot \frac{b}{2 \sin B}!$$

da aber:

$$f = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} \text{ ist,}$$

so verwandelt man jenes Product durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $2 \cos \frac{1}{2} A \; 2 \cos \frac{1}{2} C$ in:

$$R\,r = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} \cdot \frac{1}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C} \text{ rc.};$$

16) $r' = \dfrac{a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A}$,

wo r' der Radius des Kreises ist, der die Seite a selbst, aber von b und c nur die Verlängerungen berührt.

Denkt man sich die beiden Außenwinkel von B und C, die wir B' und C' nennen wollen, halbirt, so entsteht ein Dreieck, dessen Höhe $= r'$, dessen Basis $= a$ und dessen Winkel resp. $\frac{1}{2} B'$, $\frac{1}{2} C'$ und $180^0 - \frac{1}{2}(B' + C')$ sind. Drückt man die Höhe r' nach Formel (32) als Höhe aus, so entsteht:

$$r' = \frac{a \sin \frac{1}{2} B' \sin \frac{1}{2} C'}{\sin \frac{1}{2}(B' + C')};$$

da nun aber $\frac{1}{2} B'$ und $\frac{1}{2} B$ Complementwinkel sind, und ebenso $\frac{1}{2} C'$ und $\frac{1}{2} C$; überdieß:

$$B' + C' = 360^0 - (B+C)$$

also:

$$\tfrac{1}{2}(B' + C') = 180 - \tfrac{1}{2}(B+C),$$

so ergibt sich:

$$r' = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(B+C)};$$

endlich ist nun:

$$\tfrac{1}{2}(B+C) = 90 - \tfrac{1}{2} A,$$

so daß der Ausdruck der Aufgabe hieraus hervorgeht. —

17) $r'\,r''\,r''' = a\,b\,c \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$.

Die beiden Radien r'' und r''' der Kreise, welche entsprechend dem r' die Seite b und die Verlängerungen von a und c, sowie die Seite c und die Verlängerungen von a und b berühren, haben nach dem Ausdruck der Aufgabe 16) die Werthe:

$$r'' = \frac{b \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} B}$$

und:

$$r''' = \frac{c \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C};$$

ihr Product gibt leicht den Ausdruck der Aufgabe. —

18) $r' = 4 R \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$.

Hält man den Ausdruck der Aufgabe 16):

$$r' = \frac{a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A}$$

mit der Formel (36) zusammen, nach welcher:

$$a = 2 R \sin A$$

ist, so entsteht leicht dieser Ausdruck. —

19) $r' + r'' + r''' = 4R + r.$

Summirt man den Ausdruck der Aufgabe 18) mit seinen beiden analogen für r'' und r''', so entsteht:

$$r' + r'' + r''' = 4R (\sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C + \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C + \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C).$$

Dieser Ausdruck zusammengehalten mit dem Werth für $\sin \frac{1}{2}(A+B+C)$ zeigt, daß ihm nur das Glied $- \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$ fehlt, um diesem gleich zu sein, d. h. daß er gleich $\sin \frac{1}{2} (A + B + C) + \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$. Es ist demnach:

$$r' + r'' + r''' = 4R \sin \tfrac{1}{2} (A + B + C) + 4R \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C,$$

da aber $\frac{1}{2} (A+B+C) = 90^0$ und $\sin 90^0 = 1$, und da ferner:

$$4R \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C$$

nach dem Ausdruck der Aufgabe 13) gleich r ist, so entsteht aus diesem Werth der Ausdruck dieser Aufgabe. —

20) $r\, r'\, r''\, r''' = f^2.$

Das Product $r'\, r''\, r'''$ ist nach den Ausdrücken der Aufgabe 17)

$$= a\, b\, c \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C;$$

kommt dieß mit dem Werth von r nach (35) zusammen, so ist:

$$r\, r'\, r''\, r''' = a\, b^2\, c \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$= \frac{a\, b^2\, c \sin A \sin C}{4}$$

oder:

$$r\, r'\, r''\, r''' = \frac{a\, b \sin C}{2} \; \frac{b\, c \sin A}{2},$$

beide Factoren sind Werthe für f nach Formel (33) 2c. —

§. 43. **Das Lösen von trigonometrischen Aufgaben.** Beim Lösen geometrischer Aufgaben durch Rechnung und mit Hülfe der Formeln der algebraischen Geometrie und der Trigonometrie hat man zuerst, wenn in der Aufgabe selbst nicht die Summe, das Product oder ein ähnlicher Werth für gewisse, unter den unbekannten Größen gegeben ist, diese schicklich zu wählen und dann die Gleichungen in der gehörigen Anzahl anzusetzen, damit die verlangten Unbekannten sich daraus ergeben. Die Ausrechnung geschieht dann theils nach den Regeln der Algebra, theils nach Formeln der Goniometrie.

Die einfachen Fälle der Geometrie, wo das Dreieck aus den drei Seiten, den zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und einer Seite und zwei Winkel gefunden werden soll, sind in den Formeln des vorigen Paragraphen enthalten. Es ist hier nur der Fall zu betrachten, wo zwei Seiten und der der einen Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, bei welchem, wie aus der Geometrie bekannt, das ganze Dreieck zweifelhaft bleibt, sobald der bekannte Winkel der kleineren von beiden bekannten Seiten gegenüberliegt. Natürlich werden auch die trigonometrischen Formeln diesen Fall zweifelhaft lassen müssen.

Es seien z. B. die Seiten a und c und der Winkel C gegeben, so ist:

$$\sin A = \frac{a}{c} \sin C.$$

Es ist aber der Werth, den wir hier als $\sin A$ erhalten, zu zwei Winkeln gehörig, nämlich zu einem spitzen, den wir direct aus der Tafel erhalten und der mit A_1 bezeichnet sein mag, und zu dessen stumpfem Supplementwinkel, der A_2 heißen mag. Ist nun die dem bekannten Winkel C gegenüberliegende Seite c kleiner als a, so muß auch der Winkel A größer als C sein; C ist mithin ein spitzer Winkel und der berechnete spitze Winkel A_1, sowie der stumpfe A_2 können als Lösung angesehen werden. Man hat hier auch nicht darauf zu hoffen, daß der stumpfe Winkel A_2 sich dadurch ausscheiden würde, weil dann A_2 + dem gegebenen $C > 180^0$ wäre, denn $\sin A$, was $= \frac{a}{c} \sin C$ ist, wird größer als $\sin C$, da $\frac{a}{c}$ größer als 1; mithin ist der spitze Winkel A_1 größer als der spitze C. Da aber $A_1 + A_2 = 180^0$, so ist $A_2 + C < 180^0$, und beide Winkel A_1 und A_2 können mit dem gegebenen Winkel C in einem Dreieck liegen.

Ist aber die Seite $c > a$, so ist auch der Winkel $C > A$; mithin kann man nur den spitzen Winkel A_1 als Lösung annehmen, denn wenn C ein stumpfer, so ist A_1 zu nehmen, weil keine zwei stumpfen Winkel in einem Dreieck sein können, und ist C spitz, so muß A ebenfalls spitz sein, weil $C > A$ sein muß. Leicht ist nachzuweisen, daß jedenfalls der berechnete spitze Winkel A_1 mit dem stumpfen Winkel C eine Summe kleiner als 180^0 bilden muß. Denn da $\sin A = \frac{a}{c} \sin C$ und $\frac{a}{c} < 1$, so ist $\sin A < \sin C$, mithin der spitze Supplement-

winkel C_1 des stumpfen Winkels C größer als A_1, weil nun aber $C + C' = 180^0$, so ist:

$$C + A_1 < 180.$$

Sobald:

$$a \sin C = c,$$

wird $\sin A = 1$ und $A = 90^0$; es ist alsdann das Dreieck ein rechtwinkliges bestimmtes. Für $a \sin C > c$ ist $\sin A > 1$, also das Dreieck mit diesen Werthen unmöglich, weil kein Sinus größer sein kann als 1. Endlich für $a = c$ ist schon aus geometrischen Gründen $A = C$.

Wollte man diese Aufgabe mit Hülfe der Formel (19) lösen, so ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

und:

$$b = a \cos C \pm \sqrt{a^2 \cos^2 C + c^2 - a^2} = a \cos C \pm \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 C}$$

weil $a^2 (\cos^2 C - 1) = - a^2 \sin^2 C$ ist. Hier ist durch das zweifelhafte Zeichen der Wurzel die Lösung ebenfalls unbestimmt.

Sobald hier $c > a$, also $c^2 > a^2$ oder $c^2 - a^2$ positiv, so ist:

$$\sqrt{a^2 \cos^2 C + c^2 - a^2} > a \cos C;$$

es ist alsdann vor der Wurzel nur das + Zeichen zu nehmen, weil das — Zeichen einen negativen Werth für b ergeben würde; also b bestimmt. Für $c = a$ wird der eine der beiden Werthe von $b = 0$, fällt also aus. Für $a \sin C = c$ wird die Größe unter der Wurzel $= 0$, es bleibt also $b = a \cos C$ zurück; und endlich für $a \sin C > c$ wird die Wurzelgröße imaginär, die Lösung also unmöglich; was alles Punkt für Punkt mit dem Obigen übereinstimmt.

Aehnliche Zweifelhaftigkeiten und Unmöglichkeiten werden bei gar manchen Aufgaben vorkommen. Man darf daher nie versäumen, die Lösung genau in Bezug auf alle solche Fälle zu betrachten (discutiren). —

Wir lassen hier für den Lernenden als Uebung noch eine Reihe von Aufgaben folgen.

§. 44. **Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.** Die meisten der folgenden Aufgaben haben ihre Lösung schon beinahe vollständig in den Formeln des vorigen Paragraphen.*)

Es ist gegeben:

1) Die Summe der Hypothenuse und einer Kathete = s und ein Winkel = B. — Formel (12).

---

*) Bei der Lösung dieser Aufgaben sollen rein geometrische Lösungen völlig vermieden werden. Wir gehen immer auf die Winkel aus, wenn dieselben unbekannt sind.

2) Die Differenz der beiden Katheten = d und ein Winkel = C. — Formel (17).

3) Die Summe der Hypothenuse und einer Kathete = s und die zweite Kathete = b. — Formel (15).

4) Die Hypothenuse = a und die Höhe auf sie = h. — Formel (9).

5) Die Hypothenuse = a und die Differenz der Katheten = d. — Die Aufgabe ergibt:

$$b - c = d;$$

aus Formel:

$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

entsteht:

$$\frac{b - c}{a} = \sin B - \sin C = 2 \cos \tfrac{1}{2}(B + C) \sin \tfrac{1}{2}(B - C);$$

ferner ist:

$$\cos \tfrac{1}{2}(B + C) = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

also:

$$\frac{b - c}{a} = \sqrt{2} . \sin \tfrac{1}{2}(B - C)$$

und hier:

$$\sin \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{d}{a\sqrt{2}},$$

woraus $\frac{1}{2}(B - C)$ hervorgeht und mit $\frac{1}{2}(B + C) = 45^0$, B und C gibt. —

6) Die Summe der Hypothenuse und der einen Kathete = S und die Summe der Hypothenuse und der andern Kathete = s.

Nach Formel (12) ist:

$$\frac{a + b}{a} = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C$$

und nach Formel (12^*):

$$\frac{a + c}{a} = 2 \cos^2 (45^0 - \tfrac{1}{2} C);$$

aus beiden entsteht:

$$\frac{a + c}{a + b} = \frac{2 \cos^2 (45^0 - \frac{1}{2} C)}{2 \cos^2 \frac{1}{2} C},$$

also:

$$\frac{a + c}{a + b} = \frac{S}{s} = \frac{\cos^2 (45^0 - \frac{1}{2} C)}{\cos^2 \frac{1}{2} C}$$

und:

$$\frac{\cos(45^0 - \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C} = \sqrt{\frac{S}{s}};$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{S}{s}};\ \text{2c.} —$$

7) Die Summe der Hypothenuse und der Höhe auf sie $= s$, und ein Winkel $= B$.

Man hat:

$$a + h = s,$$

wo h die unbekannte Höhe bezeichnet; es ist aber nach Formel (9):

$$h = \frac{a \sin 2B}{2},$$

also:

$$a + \frac{a \sin 2B}{2} = s,$$

woraus:

$$a = \frac{2s}{2 + \sin 2B}.$$

8) Der Umfang $a + b + c = p$ und die Höhe $= h$.

Aus den Formeln:

$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

entsteht:

$$\frac{a+b+c}{a} = 1 + \sin B + \sin C;$$

da aber 1 als $\sin 90^0 = \sin A$ figurirt, so ist die rechte Seite nach Formel (3) des §. 40:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C,$$

also:

$$\frac{a+b+c}{a} = 4\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C.$$

Nach Formel (9) ist:

$$a = \frac{2h}{\sin 2B},$$

und hierdurch:

$$\frac{a+b+c}{2h} \cdot \sin 2B = 2\sqrt{2} \cdot \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C,$$

oder:

$$\frac{p}{h} \cdot \sin B \sin C = 2\sqrt{2} \cdot \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C.$$

und:

$$\frac{4p}{h} \cdot \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C = 2\sqrt{2} \cdot \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C.$$

$$\sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C = \frac{h}{p\sqrt{2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(B-C) - \cos \tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{h\sqrt{2}}{p},$$

und endlich:

$$\cos \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{h\sqrt{2}}{p} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2h+p}{p\sqrt{2}}.$$

9) Der Umfang $= p$ und der Flächeninhalt $= f$.

Nach der vorigen Aufgabe ist:

$$\frac{p}{a} = 2\sqrt{2} \cdot \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C,$$

da aber nach Formel (10^b):

$$a = 2\sqrt{\frac{f}{\sin 2B}}$$

ist, so entsteht:

$$\frac{p\sqrt{\sin 2B}}{2\sqrt{f}} = 2\sqrt{2} \cdot \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C,$$

oder:

$$\frac{p^2 \sin B \sin C}{4f} = 4\cos^2 \tfrac{1}{2} B \cos^2 \tfrac{1}{2} C$$

$$\frac{p^2 \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C}{f} = 4\cos^2 \tfrac{1}{2} B \cos^2 \tfrac{1}{2} C.$$

und:

$$\frac{p^2}{4f} = \frac{\sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C}{\cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C}$$

$$\frac{p^2}{4f} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(B-C) - \cos \tfrac{1}{2}(B+C)}{\cos \tfrac{1}{2}(B-C) + \cos \tfrac{1}{2}(B+C)}$$

und hieraus:

$$p^2 \cos \tfrac{1}{2}(B-C) + \frac{p^2}{\sqrt{2}} = 4f \cos \tfrac{1}{2}(B-C) - 2f\sqrt{2}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{p^2 + 4f}{(4f-p^2)\sqrt{2}}.$$

10) Der Flächeninhalt ist $= f$ gegeben und man weiß, daß das eine Segment der Hypothenuse (§.3) der ihm nicht anliegenden Kathete gleich ist; man soll hieraus das Dreieck völlig bestimmen.

Man hat:

$$b = m,$$

wenn m das dem b nicht anliegende Segment der Hypothenuse bezeichnet; ferner ist:

$$m = c \cos B, \text{ und:}$$
$$b = c \operatorname{tg} B,$$

also:

$$c \cos B = c \operatorname{tg} B \text{ oder:}$$
$$\cos B = \operatorname{tg} B,$$

woraus B hervorgeht. Man ersieht überdieß hieraus, daß alle rechtwinkligen Dreiecke, in welchen wie hier eine Kathete dem nicht anliegenden Segment der Hypothenuse gleich ist, einander ähnlich sind. —

§. 45. Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck.

1) Es sei die Grundlinie $= b$, die Summe der beiden andern Seiten $= s$ und der der Grundlinie gegenüberliegende Winkel $= B$ gegeben; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks finden.

Schreibt man die Formel (21) als:

$$\frac{a + c}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - C)}{\sin \frac{1}{2} B}$$

an, so ergibt sie:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A - C) = \frac{a + c}{b} \sin \tfrac{1}{2} B = \frac{s}{b} \sin \tfrac{1}{2} B,$$

was $\frac{1}{2}(A - C)$ liefert; da aber:

$$\tfrac{1}{2}(A + C) = 90 - \tfrac{1}{2} B$$

bekannt, so entsteht aus beiden leicht A und C selbst.

Aus $\frac{1}{2}(A - C)$ gehen dann die Seiten a und c mit Hülfe der Formel (23) leicht hervor, da:

$$a - c = s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - C) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B,$$

und aus Differenz und Summe die beiden Werthe selbst leicht folgen. —

Wollte man hier aber die beiden Seiten a und c direct, d. h. ohne vorher die Winkel ermittelt zu haben, finden, so ergibt die Formel (30) ihr Product:

$$a\, c = \frac{s^2 - b^2}{4 \cos^2 \frac{1}{2} B}$$

und beide folgen dann leicht. —

2) Es sei die Grundlinie = b, die Höhe = h und der Winkel an der Spitze = B gegeben, man soll die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen.

Nach Formel (32) ist:

$$h = \frac{b \sin A \sin C}{\sin B},$$

also:

$$\sin A \sin C = \frac{h}{b} \sin B;$$

da nun nach Formel (28) der Goniometrie:

$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2} [\cos (A - C) - \cos (A + C)],$$

und nach §. 40:

$$\cos (A + C) = -\cos B$$

ist, so entsteht:

$$\cos (A - C) = \frac{2h}{b} \sin B - \cos B,$$

woraus (A — C) hervorgeht; da aber weiter:

$$A + C = 180 - B$$

ist, hat man leicht A und C selbst und das Dreieck ist bekannt. —

Wollte man auch hier die beiden fehlenden Seiten a und c unmittelbar finden, so wäre in die Formeln (29) und (30) statt ac sein Werth aus Formel (33):

$$a c = \frac{2 f}{\sin B} = \frac{b h}{\sin B}$$

ebenso wie in der Aufgabe Nr. 1 und 2 des Paragraphen 42 einzusetzen, und es entstünde:

$$a + c = \sqrt{b^2 + 2 b h \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B}$$

$$a - c = \sqrt{b^2 - 2 b h \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B}$$

woraus leicht a und c hervorgehen. —

3) Es sei die eine Seite = b, die Summe der beiden andern = s und ein an der Seite b anliegender Winkel = A gegeben, man soll ꝛc.

Macht man Gebrauch von folgender Formel des §. 42:

$$\frac{a + c - b}{a + c + b} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C,$$

so gibt diese für unsern Fall:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{s - b}{s + b} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A. —$$

Wollte man die Seiten direct ermitteln, so entsteht aus Formel (20):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

und aus:

$$a = s - c:$$

$$s^2 - 2sc = b^2 - 2bc\cos A$$

und:

$$c = \frac{s^2 - b^2}{2(s - b\cos A)}.$$

4) Es seien zwei Winkel = A und C, und die Differenz der ihnen gegenüberliegenden Seiten = d gegeben, man soll 2c.

Da durch die zwei Winkel A und C auch der dritte B bekannt ist, so folgt die dritte Seite aus Formel (22):

$$b = \frac{(a - c)\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(A - C)}$$

und aus Formel (23) folgt:

$$a + c = (a - c)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(A - C)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B.$$

5) Es sei der Umfang = p und die drei Winkel = A, B und C gegeben, man soll 2c.

Alle drei Seiten folgen einfach aus Formel (24).

6) Es sei der Umfang = p, ein Winkel = B und die dazu gehörige Höhe = h gegeben, man soll 2c. —

Geht ähnlich wie die Aufgabe 7 des §. 42 gelöst wurde; wir haben durch die Höhe h:

$$b = \frac{h\sin B}{\sin A\sin C}.$$

und Formel (24) gibt wenn nur b und a vertauscht und aufgelöst wird:

$$b = \frac{(a + b + c)\sin\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C},$$

also:

$$\frac{2h\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B}{4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C} = \frac{p\sin\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C},$$

oder:

$$\frac{h\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C} = p$$

und:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{h}{p}\cos\tfrac{1}{2}B;$$

die linke Seite ist aber nach Formel (28) der Goniometrie:

$$= \frac{1}{2} \left\{ \cos \tfrac{1}{2}(A-C) - \cos \tfrac{1}{2}(A+C) \right\}$$

also:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A-C) = \frac{2h}{p} \cos \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} B$$

woraus $\frac{1}{2}(A-C)$, resp. A und C selbst folgen. —

7) Es sei ein Winkel = B, der Halbmesser des umschriebenen Kreises = R und der Flächeninhalt = f gegeben, man soll ꝛc.

Die Lösung ist ähnlich der der Aufgabe 14 des §. 42:

$$f = 4R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

also:

$$\sin A \sin C = \frac{f}{4R^2 \sin B} \text{ u. s. w.}$$

8) Es soll der Inhalt eines Dreiecks aus den drei Winkeln A, B und C und einer Höhe = h gefunden werden.

Aus Formel (34) und (32) folgt:

$$f = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$$

und:

$$b = \frac{h \sin B}{\sin A \sin C}$$

also:

$$f = \frac{h^2 \sin B}{2 \sin A \sin C}. \text{ —}$$

9) Es sei der Umfang = p, der Flächeninhalt = f und ein Winkel = A gegeben, man soll die übrigen Stücke des Dreiecks finden.

Aus Formel (25) folgt:

$$b c \cos^2 \tfrac{1}{2} A = s(s-a),$$

es ist aber:

$$f = \frac{b c \sin A}{2}$$

und:

$$bc = \frac{2f}{\sin A},$$

also:

$$s - a = \frac{2f}{s} \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2} A}{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} = \frac{f}{s} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A,$$

oder:

$$\frac{p}{2} - a = \frac{2f}{p} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A,$$

wodurch:

$$a = \frac{p}{2} - \frac{2f}{p} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A$$

eine bekannte Größe wird; da aber dann:

$$b + c = p - a$$

ebenfalls bekannt, so ist die Aufgabe auf die Nr. 1 zurückgeführt.

10) Es seien zwei Winkel = A und C und die Transversale = t zur Seite b gegeben, man soll ꝛc.

Nach dem Verfahren der Aufgabe 11 des §. 42 erhält man Fig. (4):

$$\frac{\sin B'}{\sin B''} = \frac{\sin A}{\sin C}$$

woraus;

$$\frac{\sin B' + \sin B''}{\sin B' - \sin B''} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C}$$

und:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (B' + B'') \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (B' - B'') = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A + C) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (A - C),$$

also:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (B' - B'') = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} (A + C) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (A - C),$$

woraus dann $B' - B''$ und mit Hülfe von $B' + B'' = B$ die einzelnen Winkel B' und B'' selbst hervorgehen; in den beiden Dreiecken ABE und CBE sind dann eine Seite t und alle Winkel bekannt, also a, c und b leicht zu berechnen. —

§. 46. Folgende Aufgaben gehören zwar nicht direkt zu den Dreiecksaufgaben, sind aber doch mit Hülfe der Formeln, die wir für das Dreieck gefunden haben, zu lösen:

1) Den Inhalt eines Vierecks, um das sich ein Kreis beschreiben läßt, aus den vier Seiten a, b, c und d zu finden.

Nennt man den von a und b eingeschlossenen Winkel α, so ist der gegenüberliegende $180^0 - \alpha$ und:

$$f = \tfrac{1}{2} (ab + cd) \sin\alpha;$$

um einen Werth für die Unbekannte $\sin\alpha$ zu erhalten, drückt man die entsprechende Diagonale auf zwei Arten aus und hat so:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd \cos\alpha,$$

woraus:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)};$$

um nun aus der Flächeninhaltsformel das $\sin\alpha$ zu eliminiren, dabei aber doch das Quadriren zu vermeiden, muß man zu den Functionen des halben Winkels übergehen, und hat:

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2(ab + cd)}$$

$$= \frac{(c + d - a + b)(c + d + a - b)}{2(ab + cd)};$$

ähnlich erhält man:

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(a + b - c + d)(a + b + c - d)}{2(ab + cd)},$$

wodurch:

$$f = \frac{1}{4}\sqrt{\{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)\}}$$

wird. —

2) Den Inhalt eines Vierecks, in welchem zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind, aus den vier Seiten a, b, c und d zu finden.

Geht ganz analog 1) und gibt als Resultat:

$$f = \frac{1}{4}\,\frac{ab + cd}{ab - cd}$$

$$\times\sqrt{(a + b + c + d)\,(b + c - a - d)\,(a + c - b - d)\,(a + b - c - d)}.$$

3) Den Inhalt eines Vierecks aus den beiden Diagonalen $= d$ und d' und dem Winkel, den sie einschließen $= \alpha$, zu suchen.

Nennt man die Segmente der Diagonalen m und n, p und q, so daß: $m + p = d$ und $n + q = d'$, so hat man den Inhalt f gleich der Summe der Inhalte der vier durch die Diagonalen gebildeten Dreiecke, oder:

$$2f = mn\sin\alpha + np\sin\alpha + pq\sin\alpha + qm\sin\alpha =$$

$$= m(n + q)\sin\alpha + p(n + q)\sin\alpha = dd'\sin\alpha.$$

Leicht läßt sich auch durch geometrische Behandlung die Figur in ein Dreieck verwandeln, dessen beide Seiten d und d' sind und welche den Winkel α einschließen, so daß hieraus direct f (wie oben) folgt.

4) Aus den vier Winkeln α, β, γ und δ und zwei gegenüberliegenden Seiten a und b den Inhalt des Vierecks zu berechnen.

Man verlängert die beiden nicht gegebenen Seiten nach der Richtung hin, in welcher sie convergiren, hierdurch hat man zwei auf einander liegende Dreiecke, in welchen alle Winkel und außerdem in je-

dem eine Seite bekannt; man kann also ihre Inhalte berechnen, um dann durch Abzug den Inhalt des Vierecks zu finden. Nimmt man an, die Verlängerung geschehe über die Seite a, an welcher die Win- α und β anliegen, so hat man:

$$f = \frac{b^2 \sin\gamma \sin\delta - a^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

5) Den Inhalt eines Trapezes zu berechnen, wenn eine der parallelen Seiten $= a$, die zwei daran liegenden Winkel $= \alpha$ und β und der Abstand der paralellen Seiten $= h$ gegeben.

Zieht man eine Parallele, durch den Endpunkt der gegebenen Seite, zu der andern nicht parallelen Seite, daß ein Dreieck und ein Parallelogramm entstehen, so hat man den Inhalt dieses letzteren $= ah$, und wenn f' der Inhalt des Dreiecks ist:

$$f = ah \pm f';$$

wo das Zeichen $+$ gilt, wenn die Seite a kleiner als ihre Parallele, und das $-$ Zeichen, wenn sie größer ist. Im ersteren Falle sind die Winkel an der Basis des Dreiecks $180^0 - \alpha$ und $180^0 - \beta$, und der Inhalt nach dem Resultat der achten Aufgabe über das schiefwinklige Dreieck:

$$f' = -\frac{1}{2} h^2 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta},$$

wenn das Zeichen $-$ gilt, ist die gegebene Seite a die größere und

$$f' = \frac{1}{2} h^2 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta},$$

also in beiden Fällen:

$$f = h\left(a - \frac{1}{2} h \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}\right). -$$

6) Den Inhalt eines Vierecks aus drei Seiten $= a$, b und c und den beiden von diesen eingeschlossenen Winkeln $= \alpha$ und β zu berechnen.

An der Seite b liegen die beiden Winkel α und β an, verlängert man die beiden Seiten a und c, die einander gegenüberliegen, bis sie sich schneiden, so sind hierbei zwei Fälle möglich: 1) die Verlängerung geschieht über die bekannte Seite b, oder 2) sie geschieht über die unbekannte hinaus. Bezeichnet man mit x die Verlängerung von a, mit z die von c, so hat man im ersten Fall, wenn f'' der Inhalt des bloß von den Verlängerungen und b gebildeten Dreiecks ist, und f' der, des von a und c nebst ihren Verlängerungen und der unbekannten Seite gebildeten:

$$f = f' - f''.$$

Hier ist zuerst:

$$f'' = \frac{1}{2} x z \sin(\alpha' + \beta'),$$

wo $\alpha' = 180^0 - \alpha$ und $\beta' = 180^0 - \beta$, also:

$$f'' = -\frac{1}{2} x z \sin(\alpha + \beta)$$

und dann:

$$f' = \frac{1}{2}(a+x)(c+z) \sin(\alpha'+\beta') = -\frac{1}{2}(a+x)(c+z)\sin(\alpha+\beta);$$

also:

$$f = -\frac{1}{2}(ac + az + cx) \sin(\alpha + \beta).$$

Es ist aber:

$$x = -\frac{b \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

und:

$$z = -\frac{b \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

wodurch:

$$f = \frac{1}{2}\left(ab \sin\alpha + bc \sin\beta - ac \sin(\alpha+\beta)\right).$$

Dasselbe Resultat wird man auch im zweiten Fall erhalten, denn hier ist:

$$f = f'' - f'$$

aber f' und f'' sind dieselben, nur mit entgegengesetzten Zeichen versehenen Größen. —

7) Aus zwei aneinanderstoßenden Seiten = a und b und den vier Winkeln = α, β, γ und δ den Inhalt des Vierecks zu berechnen.

Man verlängert wieder eine der gegebenen Seiten und die ihr gegenüberliegende, bis beide sich treffen, und hat hier zwei Fälle: entweder geht die Verlängerung über die andere bekannte Seite weg oder nicht. Betrachten wir hier bloß den ersten Fall, indem der zweite sich ähnlich zu ihm verhält, wie der zweite in der vorigen Aufgabe zum ersten.

Die Verlängerung gehe über a, an welcher Seite die Winkel α und δ anliegen, man hat dann, wenn f'' den Inhalt des durch die Verlängerung entstandenen Dreiecks bedeutet, wie oben:

$$f'' = \frac{a^2 \sin\alpha \sin\delta}{2\sin(\beta+\gamma)},$$

wenn nun y die Verlängerung von b ist:

$$y = \frac{a \sin\delta}{\sin(\beta+\gamma)},$$

also die Seite des großen Dreiecks:

$$b + y = \frac{b \sin(\beta + \gamma) + a \sin\delta}{\sin(\beta + \gamma)}$$

und der Inhalt dieses Dreiecks:

$$f' = \frac{(b \sin(\beta + \gamma) + a \sin\delta)^2 \sin\beta}{2 \sin\gamma \sin(\beta + \gamma)},$$

woraus:

$$f = f' - f'' = \frac{a^2 \sin\delta\,(\sin\delta \sin\beta - \sin\alpha \sin\gamma)}{2 \sin\gamma \sin(\beta + \gamma)}$$

$$+ \frac{b^2 \sin(\beta + \gamma) \sin\beta + 2ab \sin\beta \sin\delta}{2 \sin\gamma}.$$

Die mit a^2 verbundene Klammergröße läßt sich verwandeln, wenn man nämlich, um α zu vermeinden, statt $\sin\alpha$ seinen Werth $= -\sin(\beta + \gamma + \delta)$ setzt und alles auflöst, reducirt und neu ordnet, man erhält dann:

$$\sin\beta \sin\delta - \sin\alpha \sin\gamma = \sin(\alpha + \delta) \sin(\beta + \gamma)$$

und hierdurch:

$$f = \frac{a^2 \sin\delta \sin(\alpha + \beta) + b^2 \sin(\beta + \gamma) \sin\beta + 2ab \sin\beta \sin\delta}{2 \sin\gamma}.$$

8) Die vier Seiten eines Vierecks $= a$, b, c und d und ein Winkel $= \alpha$ sind gegeben, man soll den Inhalt finden.

Wird ähnlich den Aufgaben 1) und 2) behandelt. Man hat, wenn α der von a und b, γ der von c und d eingeschlossene Winkel ist:

$$f = \tfrac{1}{2} ab \sin\alpha + \tfrac{1}{2} cd \sin\gamma,$$

wo γ mit Hülfe der Gleichung:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos\gamma$$

eliminirt werden kann.

9) Die Winkel eines Vierecks aus den vier Seiten $= a$, b, c und d und dem Inhalte zu bestimmen.

Die Formeln:

$$f = \tfrac{1}{2} ab \sin\alpha + \tfrac{1}{2} cd \sin\gamma$$

und:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos\gamma$$

in der Lösung der Aufgabe 8, geben, wenn in Bezug auf γ geordnet wird:

$$cd \sin\gamma = 2f - ab \sin\alpha$$

und:

$$c d \cos\gamma = \frac{c^2 + d^3 - a^2 - b^2}{2} + a b \cos\alpha.$$

Setzt man hierbei die Abkürzung halber:

$$\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2} = A,$$

und quadrirt, so entsteht:

$$c^2 d^2 \sin^2\gamma = (2 f - a b \sin\alpha)^2$$

und:

$$c^2 d^2 \cos^2\gamma = (A + a b \cos\alpha)^2,$$

addirt man beide Gleichungen, so verschwindet der Winkel γ gänzlich, von α aber die zweite Potenz der Functionen, wodurch:

$$c^2 d^2 = 4 f^2 + A^2 + a^2 b^2 + 2 a b (A \cos\alpha - 2 f \sin\alpha)$$

und:

$$A \cos\alpha - 2 f \sin\alpha = \frac{c^2 d^2 - a^2 b^2 - 4 f^2 - A^2}{2 a b} \text{ 2c.}$$

10) Die vier von der einen Diagonalen im Viereck gebildeten Winkel sind $= \alpha, \beta, \gamma$ und δ gegeben, man soll die von den andern Diagonalen gebildeten finden.

Es sei ABCD das Viereck und die Diagonale von A nach C hingezogen, die Winkel α und δ liegen an der Ecke A, ebenso β und γ an C; und zwar liegen α und β auf der Seite der Diagonale nach B hin; sodann seien die Winkel der andern Diagonale BD: v, w, x und y, wovon v und y an der Ecke B, w und x an D liegen und zwar liegen w und x nach C hin.

Man hat dann:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha},$$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{\sin x}{\sin w}$$

und:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

durch Multiplication der drei Gleichungen entsteht:

$$1 = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin x \sin\delta}{\sin\alpha \sin w \sin(\gamma + \delta)},$$

oder:

$$\frac{\sin x}{\sin w} = \frac{\sin\alpha \sin(\gamma + \delta)}{\sin\delta \sin(\alpha + \beta)},$$

was in Aufgabe 16) des §. 38 seine weitere Entwicklung hat.

11) In einem Viereck sind zwei einander gegenüberliegende Seiten $= a$ und b, die an diesen Seiten nach einer Richtung hin anliegenden Winkel $= \alpha$ und β gegeben, und außerdem der Winkel, den eine der Diagonalen nach der andern Richtung mit einer der nicht gegebenen Seite macht $= \gamma$, man soll nun alle Winkel finden, die diese Diagonale im Viereck bildet.

Die Diagonale durchschneide den Winkel α, das an a anliegt und bilde mit der unbekannten Seite den Winkel γ; der Winkel α zerfällt in die beiden Theile x und y, wovon der letztere an der Seite a anliegt. Man hat dann, wenn die Diagonale $= w$ ist:

$$w = \frac{a \sin(\gamma + y)}{\sin \gamma} = \frac{b \sin \beta}{\sin x};$$

es ist aber $y = \gamma - x$, wodurch:

$$a \sin(\gamma + \alpha - x) \sin x = b \sin \beta \sin \gamma$$

entsteht. Löst man auf, so wird:

$$\sin(\alpha + \gamma) \sin x \cos x - \cos(\alpha + \gamma) \sin^2 x = \frac{b \sin \beta \sin \gamma}{a},$$

oder:

$$\sin(\alpha + \gamma) \sin 2x + \cos(\alpha + \gamma) \cos 2x = \frac{2b \sin \beta \sin \gamma}{a} + \cos(\alpha + \gamma),$$

woraus:

$$\cos(\alpha + \gamma - 2x) = \frac{2b}{a} \sin \beta \sin \gamma + \cos(\alpha + \gamma).$$

Hierdurch sind alle übrigen Winkel bekannt. —

12) Die vier Seiten eines Vierecks im Kreise sind $= a, b, c$ und d gegeben, man soll den Radius dieses Kreises finden.

Zieht man eine Diagonale $= x$ und nennt die Inhalte der dadurch entstehenden Dreiecke f' und f'', so ist, da der Kreis beiden Dreiecken umschrieben, nach 28) §. 7:

$$\frac{abx}{4R} = f'$$

und:

$$\frac{cdx}{4R} = f''$$

woraus:

$$f = \frac{(ab + cd)x}{4R},$$

wo f der Inhalt des Vierecks ist. Hieraus entsteht:

$$R = \frac{(ab + cd)x}{4f};$$

und 4 f nach Aufgabe 1) dieses Paragraphen $= \sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}$ ist.

Nach derselben Aufgabe 1) ist:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

und:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)},$$

also:

$$x^2 = \frac{(a^2+b^2)(ab+cd) - ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab + cd} =$$

$$= \frac{cd(a^2+b^2) + ab(c^2+d^2)}{ab + cd} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab + cd}.$$

Es wird hierdurch:

$$R = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-c)}}.$$

13) Ein Viereck ist durch seine vier Winkel $= \alpha, \beta, \gamma$ und δ und zwei an einanderliegende Seiten $=$ a und b gegeben, man soll ein Quadrat in dasselbe so zeichnen, daß dessen Ecken auf den Vierecksseiten liegen.

Ist ABCD das gegebene Viereck, MNOP das Quadrat, wobei der Punkt M auf der Seite AB, N auf CB liegt 2c., so hat man nur nöthig, einen der Winkel, welche die Quadratseiten mit den Vierecksseiten machen, z. B. BMN $=$ y und die Quadratseite x zu bestimmen, damit die Aufgabe gelöst sei. Durch den Winkel y sind alle übrige Winkel auszudrücken; so AMP$=90^0-$y, BNM$=180^0-\beta-$y, wenn an der Ecke B der Winkel β liegt; CNO$=90^0-$BNM$=\beta+$y-90^0; MPA$=180^0-\alpha-$AMP$=90^0+$y$-\alpha$; CON $=180^0-\gamma-$CNO $= 270^0 - \gamma - \beta -$ y.

Man hat hierdurch, da a $=$ AM $+$ BM und b $=$ BN $+$ CN ist, und überdieß:

$$MB = \frac{x\sin(\beta + y)}{\sin\beta}$$

und:

$$BN = \frac{x\sin y}{\sin\beta},$$

außerdem:

$$AM = \frac{x \cos (y - \alpha)}{\sin \alpha}$$

und:

$$NC = -\frac{x \cos (\beta + \gamma + y)}{\sin \gamma}$$

die Gleichungen:

$$a = x \left(\frac{\sin (\beta + y)}{\sin \beta} + \frac{\cos (y - \alpha)}{\sin \alpha} \right)$$

und:

$$b = x \left(\frac{\sin y}{\sin \beta} - \frac{\cos (\beta + \gamma + y)}{\sin \gamma} \right)$$

und weiter:

$$a \left(\frac{\sin y}{\sin \beta} - \frac{\cos (\beta + \gamma + y)}{\sin \gamma} \right) = b \left(\frac{\sin (\beta + y)}{\sin \beta} + \frac{\cos (y - \alpha)}{\sin \alpha} \right),$$

oder:

$$a \sin \alpha [\sin y \sin \gamma - \sin \beta \cos (\beta + \gamma) \cos y + \sin \beta \sin (\beta + \gamma) \sin y]$$
$$= b \sin \gamma (\sin \alpha \sin \beta \cos y + \sin \alpha \cos \beta \sin y + \sin \beta \cos y \cos \alpha$$
$$+ \sin \beta \sin y \sin \alpha),$$

und wenn man mit $\sin \alpha \cos y$ Glied für Glied dividirt und in Bezug $\operatorname{tg} y$ auflöst:

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin \beta [a \cos (\beta + \gamma) + b \sin \gamma (1 + \operatorname{cotg} \alpha)]}{a [\sin \gamma + \sin \beta \sin (\beta + \gamma)] - b \sin \gamma (\sin \beta + \cos \beta)}.$$

14) Die vier Seiten eines Vierecks = a, b, c und d und die zwei Diagonalen = D und D′ sind gegeben, man soll die Segmente dieser Diagonalen finden.

Wenn ABCE das Viereck, F der Schnittpunkt der Diagonalen, AC = D, BE = D′, so sei AF = x und BF = y, hierdurch CF = d — x und EF = D′ — y. Die drei Dreiecke AFB, BFC und CEF geben:

$$x^2 = a^2 + y^2 - 2 a y \cos ABE,$$
$$(D - x)^2 = b^2 + y^2 - 2 b y \cos CBE,$$
$$y^2 = b^2 + (D - x)^2 - 2 b (D - x) \cos ACB$$

und:

$$(D' - y)^2 = c^2 + (D - x)^2 - 2 c (D - x) \cos ACE.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten, die dritte von der vierten ab, und setzt für die Cosinus der unbekannten Winkel die Werthe, nämlich:

$$\cos ABE = \frac{a^2 + D'^2 - d^2}{2\,a\,D'}, \quad \cos CBE = \frac{b^2 + D'^2 - c^2}{2\,b\,D'},$$

$$\cos ACB = \frac{b^2 + D^2 - a^2}{2\,b\,D} \text{ und } \cos ACE = \frac{c^2 + D^2 - d^2}{2\,c\,D},$$

so entsteht:

$$D^2 - 2\,D\,x = b^2 - a^2 + \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{D'}\,y$$

$$D'^2 - 2\,D\,y = c^2 - b^2 + \frac{b^2 - a^2 + d^2 - c^2}{D}\,(D - x),$$

aus welchen x und y durch Elimination zu finden. —

15) Die unmeßbare Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, zu welchen man zwar gelangen, auf welchen man jedoch keine Winkel messen kann, wenn die, die Punkte verbindende Grade über beide hinaus zu verlängern ist und diese Verlängerungen gemessen werden können.

A und B seien die beiden Punkte; hat man nun ihre unmeßbare Entfernung x über A hinaus bis C um a und über B hinaus bis D um b verlängert, auf einem vierten Punkte E aber die Winkel AEC $= \alpha$, AEB $= \beta$, BED $= \gamma$ gemessen, so können folgende Proportionen angesetzt werden:

$$\frac{a}{CE} = \frac{\sin\alpha}{\sin CAE};$$

$$\frac{b}{DE} = \frac{\sin\gamma}{\sin DBE};$$

$$\frac{CE}{a + x} = \frac{\sin DBE}{\sin(\alpha + \beta)};$$

und:

$$\frac{DE}{b + x} = \frac{\sin CAE}{\sin(\beta + \gamma)};$$

durch Multiplication dieser vier Gleichungen entsteht:

$$\frac{a\,b}{(a + x)\,(b + x)} = \frac{\sin\alpha\,\sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta)\,\sin(\beta + \gamma)},$$

durch Umkehren der Brüche und Ausführung der Multiplicationen wird die unreine quadratische Gleichung:

$$x^2 + (a+b)\,x = \frac{ab\,[\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) - \sin\alpha\sin\gamma]}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

und hieraus, nach vorhergehender Reduction:

$$x = \tfrac{1}{2}\left[-(a+b) + \sqrt{\left((a+b)^2 + \frac{4ab\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}\right)}\right].$$

16) Man weiß die gegenseitigen Abstände = a und b dreier in einer Graden liegenden Punkte; und soll daraus die Lage eines vierten Punktes, auf welchem man sich befindet, bestimmen, wenn man nur die beiden Winkel messen kann, welche die nach den drei Punkten gehenden Gesichtsstrahlen in dem vierten Punkt mit einander machen.

Sind A, B und C die drei Punkte, und hat man auf D, dem vierten Punkt, die Winkel ADB = α und BDC = β gemessen, so wird, wenn man den Winkel bei A = x setzt, aber auch den entsprechenden bei C = y (weil er ebenso gut als Unbekannte erscheinen darf als x), in dem Dreieck ABD die Linie:

$$BD = \frac{a\sin x}{\sin\alpha}$$

und im Dreieck BCD:

$$BD = \frac{b\sin y}{\sin\beta}$$

oder:

$$\frac{a\sin x}{\sin\alpha} = \frac{b\sin y}{\sin\beta}$$

und:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta},$$

eine Gleichung, die ihre Lösung in Aufgabe 16 des §. 38 hat.

x + y ist = 180° — ($\alpha + \beta$), also:

$$\operatorname{cotg}\frac{(x-y)}{2} = \frac{\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} + 1}{\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} - 1}\operatorname{tg}\frac{(\alpha+\beta)}{2}$$

oder auch:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{b\sin\alpha + a\sin\beta}{b\sin\alpha - a\sin\beta}\operatorname{tg}\frac{(\alpha+\beta)}{2}\,.$$

17) Die vorige Aufgabe, wenn die drei Punkte nicht in einer Graden liegen, sondern ein Dreieck bilden, in welchem alle sechs Stücke gegeben. *)

Sind die drei das Dreieck bildenden Punkte A, B und C, D aber der Standpunkt des Beobachters; sind die Winkel ADB $= \alpha$ und BDC $= \beta$ bekannt und bezeichnet man den bekannten Winkel ABC mit B, die unbekannten ABD mit x und CBD, analog wie unter 16, mit y, so ist ganz wie dort im Dreieck ABD:

$$BD = \frac{a \sin(x + \alpha)}{\sin \alpha}$$

und im Dreieck CBD:

$$BD = \frac{b \sin(y + \beta)}{\sin \beta}$$

und:

$$\frac{a \sin(x + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{b \sin(y + \beta)}{\sin \beta},$$

woraus:

$$\frac{\sin(x + \alpha)}{\sin(y + \beta)} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta};$$

wendet man auf diese Gleichung dasselbe Verfahren, wie oben an, oder setzt man das x in Aufgabe 16 §. 38 hier $x+\alpha$ und das y hier $y + \beta$, so ist deren Endresultat:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x+y+\alpha+\beta) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x-y+\alpha-\beta) = \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta},$$

woraus:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x-y+\alpha-\beta) = \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(B+\alpha+\beta).$$

Professor Grunert hat zu dieser Aufgabe eine andere Lösung gegeben. Da man nämlich in dem bekannten Dreieck ABC auch die Winkel weiß, so sucht er die beiden unbekannten Winkel des Dreiecks ADC und bezeichnet CAD mit x, ACD mit y; auf diese Art wird durch die Linie BD wie oben die Gleichung:

$$\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \frac{\sin(C + y)}{\sin(A + x)},$$

wo C statt ABC und A statt CAB steht, erhalten.

---

*) Diese Aufgabe ist eine der berühmtesten in der practischen Geometrie und unter der Benennung „Potenot'sche Aufgabe" bekannt. Sie ist schon vielfältig, sowohl durch Construction, als auch durch Rechnung gelöst worden. —

Es ist aber:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin C}{\sin A},$$

die obige Gleichung wird also:

$$\sin C \sin\beta \sin(A + x) = \sin A \sin\alpha \sin(C + y);$$

führt man aus und ordnet um, so entsteht:

$$\sin A \sin C (\sin\beta \cos x - \sin\alpha \cos y) = \sin A \sin\alpha \cos C \sin y$$
$$- \sin C \sin\beta \cos A \sin x;$$

$$(\gamma + x) + (\alpha + y) \text{ ist aber } = 180^0,$$

also:

$$\sin(\beta + x) = \sin(\alpha + x),$$

oder:

$$\sin\beta \cos x + \cos\beta \sin x = \sin\alpha \cos y + \cos\alpha \sin y,$$

oder auch:

$$\sin\beta \cos x - \sin\alpha \cos y = \cos\alpha \sin y - \cos\beta \sin x.$$

Setzt man diesen Werth statt der obigen Klammergröße in die Gleichung ein, so erhält man:

$$\sin A \sin C (\cos\alpha \sin y - \cos\beta \sin x) = \sin\alpha \sin A \cos C \sin y$$
$$- \sin\beta \sin C \cos A \sin x$$

und hat so ganz wie unter 16):

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A \sin(\alpha - C)}{\sin C \sin(\beta - A)} \text{ *)},$$

also das Verhältniß der beiden zu suchenden Sinus. —

18) Man befindet sich mit einem Winkelmeßinstrument auf einem Thurme, dessen Höhe man kennt, und will von da aus, ohne von der Stelle zu gehen, die Entfernung zweier Punkte A und B, die mit dem Fuß des Thurmes in derselben Horizontalebene liegen, bestimmen; h sei die Höhe des Thurmes.

Man kann, wenn man die Zenithdistanzen der Punkte A und B, d. h. die Winkel, welche die nach ihnen gezogenen Gesichtsstrahlen mit der Lothlinie des Thurmes machen, gemessen und gleich α und β gefunden hat, die Entfernung derselben von dem Standpunkte auf dem Thurme leicht berechnen. Wird nämlich der Standpunkt auf dem Thurme mit C bezeichnet, so ist:

$$AC = \frac{h}{\sin\alpha}$$

und:

---

*) Professor Grunert hat die Entwicklung noch weiter getrieben, was wir an einem andern Orte besprechen wollen. —

$$BC = \frac{h}{\sin\beta},$$

hat man nun außerdem auf dem Thurme den Winkel ACB $= \gamma$ gemessen, so ist:

$$AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2 - 2\,AC\,.\,BC\cos\gamma)}$$

$$= h\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}\right)}$$

$$= \frac{h}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)}$$

$$= \frac{h}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{\left((\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 4\sin\alpha\sin\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\right)}$$

$$= \frac{2h}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{\left(\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\right)}.$$

19) Man hat auf dreien, in einer graden Linie und mit dem Fuß eines vertikal stehenden Gegenstandes in derselben Horizontalebene liegenden, Standpunkten die Winkel gemessen, welche die nach der Spitze des Gegenstandes gedachten Linien mit der Horizontalebene machen und außerdem die Entfernung der drei Punkte von einander; man will nun hieraus die Höhe des Gegenstandes berechnen.

Es sei AB der vertikale Gegenstand, z. B. ein Thurm, und zwar A die Spitze, B der Fuß, C, D und E seien die drei Punkte, auf welchen man in derselben Reihenfolge die Höhenwinkel α, β und γ gemessen hat, außerdem sei CD $=$ a, DE $=$ b. Wird nun AB mit x bezeichnet, so ist:

$$AC = \frac{x}{\sin\alpha},$$

$$AD = \frac{x}{\sin\beta}$$

und:

$$AE = \frac{x}{\sin\gamma},$$

und weiter:

$$\cos ADC = \frac{AD^2 + a^2 - AC^2}{2a\,.\,AD},$$

und:

$$\cos ADE = \frac{AD^2 + b^2 - AE^2}{2b\,.\,AD},$$

da aber cos ADC = — cos ADE ist, so entsteht:

$$b\,(AD^2 + a^2 - AC^2) = -a\,(AD^2 + b^2 - AE^2);$$

oder:

$$b\left(\frac{x^2}{\sin^2\beta} + a^2 - \frac{x^2}{\sin^2\alpha}\right) = -a\left(\frac{x^2}{\sin^2\beta} + b^2 - \frac{x^2}{\sin^2\gamma}\right).$$

oder:

$$x^2\left(\frac{a+b}{\sin^2\beta} - \frac{a}{\sin^2\gamma} - \frac{b}{\sin^2\alpha}\right) = -ab\,(a+b)$$

und:

$$x = \sqrt{\frac{ab\,(a+b)\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{(a+b)\sin^2\alpha\sin^2\gamma - (a\sin^2\alpha + b\sin^2\gamma)\sin^2\beta}}. —$$

20) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts, dessen Bogen = b, wenn der Radius des Kreises = r ist.

Der Flächeninhalt des Kreisabschnitts ist gleich dem des Kreisausschnitts weniger dem des zugehörigen Dreiecks. Der erstere ist:

$$f' = \frac{rb}{2}$$

und der andere:

$$f'' = \frac{r^2 \sin\alpha}{2},$$

wo α aus dem Bogen b berechnet werden muß; $\frac{b}{r}$ ist nämlich der Bogen, der diesem Winkel α, in dem Kreise dessen Radius gleich 1 ist, angehört. Will man nun die Anzahl von Graden, Minuten oder Secunden wissen, welche dieser Bogen zählt, so hat man mit arc 1^0, arc $1'$, oder arc $1''$ in $\frac{b}{r}$ dividiren. Statt arc $1'$ und arc $1''$ kann man auch, wie wir wissen, resp. sin $1'$ und sin $1''$ als genügende Annäherung setzen. Es ist also:

$$f = f' - f'' = \frac{rb}{2} - \frac{r^2}{2}\sin\left(\frac{b}{r\sin 1'}\right). —$$

21) Wie groß ist die Fläche der Zone der Erdkugel (deren Radius = R), welche zwischen den Parallelkreisen der Breiten φ und φ' liegt.

Die Oberfläche einer Zone ist:

$$f = 2\pi R h,$$

h ist aber $= R(\sin\varphi' - \sin\varphi)$ 2c. —

22) In einen Kreis, dessen Radius = r, ist ein reguläres n=Eck beschrieben; es ist der Halbmesser desjenigen Kreises zu finden, bei

welchem das eingeschriebene reguläre m-Eck p mal so groß ist, als jenes n-Eck. —

23) Wie verhalten sich die Inhalte des regulären umschriebenen m-Ecks und des regelmäßigen eingeschriebenen n-Eck. —

24) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts, dessen Pfeil = h und dessen Sehne = 2b. —

25) Wenn ein Luftballon sich in einer Höhe von a Meilen befindet, wie groß ist dann der Halbmesser seines Gesichtskreises, und wie viel Quadratmeilen übersieht er, wenn der Halbmesser der Erde = R Meilen. —

26) Welchen Weg macht ein Ort, der unter φ^0 geographischer Breite liegt, durch die Umdrehung der Erde in m Stunden. —

27) Auf der Linie, die einen gegebenen Winkel = α halbirt, ist ein Punkt durch seine Entfernung vom Scheitel = a bestimmt, man soll durch ihn eine gerade Linie der Art ziehen, daß ihre Länge zwischen den Schenkeln des Winkels einer gegebenen Größe b gleich sei. (Kann unter andern mit Hülfe des Resultats der Aufgabe 12, §. 42 leicht gelöst werden). —

28) An einen Kreis, dessen Halbmesser r bekannt ist, sind zwei Tangenten gezogen, die den Winkel α mit einander machen, es soll nun eine dritte Tangente so gezogen werden, daß ihr zwischen den beiden ersteren enthaltenes Stück eine gegebene Größe b habe. —

29) Es sind die Halbmesser zweier Kreise, gleich r und R, ihre Centrallinie AB = c und ein Punkt C auf ihr durch seinen Abstand von den einen Mittelpunkt A (so daß AC = a) gegeben, man soll durch diesen Punkt C eine, die beiden Kreise schneidende, Grade so ziehen, daß ihre zwischen den Peripherien und dem Punkt C liegenden Stücke in einem gegebenen Verhältniß q stehen. —

30) Es ist ein Kreis durch seinen Halbmesser r und zwei Punkte auf seiner Peripherie durch ihren gegenseitigen Abstand a gegeben, man soll aus den beiden Punkten Sehnen ziehen, die sich unter einem gegebenen Winkel α schneiden und die ein gegebenes Verhältniß q zu einander haben. —

Fünftes Capitel.

Die sphärische Trigonometrie.

§. 47. **Das körperliche und das sphärische Dreieck.** Es ist hier nur in das Gedächtniß zurückzurufen, daß die dreikantige körperliche Ecke, deren Spitze (Scheitel) in den Mittelpunkt einer Kugel gelegt ist, das Maß ihrer Kantenwinkel in den Bogen der größten Kreise der Kugeloberfläche findet, die zwischen den Kanten gezogen werden und daß die Flächenwinkel der körperlichen Ecke identisch mit den sphärischen Winkeln, welche jene Bogen einschließen, sind. Denkt man sich also die drei Ebenen jener körperlichen Ecke, die Oberfläche einer Kugel, deren Radius = 1 in drei Bogen größter Kreise schneidend, so ist das so entstandene sphärische Dreieck in seinen einzelnen sechs Stücken mit den sechs Stücken jenes körperlichen Dreiecks identisch. Die Formeln, welche für das körperliche Dreieck gefunden werden, gelten auch für das sphärische und umgekehrt, sobald man nur die trigonometrischen Functionen der Bogen nach §. 29 richtig versteht.

§. 48. **Die Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck.** Denken wir uns in dem körperlichen Dreieck SABC (Fig. 38) stehe die Fläche SAC senkrecht auf der Fläche SAB, und die Bogen AC, AB und BC seien größte Kreise einer Kugel, deren Radius = 1 und deren Mittelpunkt in S, so haben wir in ABC ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen rechter Winkel in A.

Wir bezeichnen in diesem Dreieck entsprechend dem rechtwinkligen, ebenen: die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen (die Katheten) mit b und c oder, was dasselbe ist, es bedeuten diese Buchstaben die jenen Bogen entsprechenden Kantenwinkel, resp. ASC und ASB, und weiter die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt (die Hypothenuse) oder entsprechend den Kantenwinkel CSB mit a.

Zur Ermittlung von Formeln, in welchen der sphärische, resp. Flächenwinkel B vorkommt, schaffen wir uns nun ein ebenes Dreieck, in welchem derselbe enthalten ist, und fällen zu dem Ende aus C eine Senkrechte CA′ auf SA, und weiter von A′ eine Senkrechte A′B′ auf SB; es ist alsdann die Verbindungslinie CB′ auch senkrecht auf SB und der Winkel B′ des rechtwinkligen, ebenen Dreiecks A′B′C ist der Repräsentant des sphärischen Winkels B.

Außer diesem Dreieck haben wir noch die rechtwinkligen ebenen Dreiecke A′SC, A′SB′ und CSB′, von welchen jedes einen der drei Kantenwinkel der körperlichen Ecke, resp. der drei Seiten a, b und c unseres sphärischen rechtwinkligen Dreiecks ABC enthält, und in welchen, wenn SC für die Einheitslänge gilt:

$$CA' = \sin b,$$
$$SA' = \cos b,$$
$$CB' = \sin a$$
und: $$SB' = \cos a \text{ ist.}$$

Im Dreieck SA′B′, welches als Winkel den Kantenwinkel c, resp. die Seite c des sphärischen Dreiecks enthält, findet nun statt:

$$SB' = SA' \cdot \cos c,$$

oder:

$$\cos a = \cos b \cos c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

ebenso gibt unser obiges Dreieck CA′B′, welches den sphärischen Winkel B enthält:

$$A'C = B'C \cdot \sin B,$$

oder:

$$\sin b = \sin a \sin B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Haben wir nun ähnlich in A Fig. (39) auf SA eine Senkrechte AC′ errichtet, so ist diese gleich der Tangente des Bogens, resp. Kantenwinkels b, sobald auch hier SC als die Einheitslänge gilt; während die von A auf SB gefällte Senkrechte AB′ den Sinus des Bogens, resp. Kantenwinkels c darstellt. Da nun aber im rechtwinkligen Dreieck AB′C′ die Relation:

$$AC' = AB' \cdot \operatorname{tg} B'$$

besteht und B′ ebenso, wie Fig. (38) gleich dem sphärischen Winkel B ist, so haben wir als dritte Formel im rechtwinkligen sphärischen Dreieck:

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Aus Fig. (40), wo A′C′ senkrecht auf SA′ und A′B, sowie C′B senkrecht auf SB ist, folgt mit Hülfe des Dreiecks A′BC′:

$$A'B = BC' \cos B,$$

oder:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Hält man diese hier erhaltenen vier Formeln mit den entsprechenden des ebenen rechtwinkligen Dreiecks zusammen, so sieht man, daß (2) der Formel: $b = a \sin B$; (3) der: $b = c \operatorname{tg} B$ und (4) der

$c = a \cos B$ entspricht. Die Formel (1) muß alsdann dem $a^2 = b^2 + c^2$ entsprechend gedacht werden. *)

Diese Formeln, deren analogen im ebenen rechtwinkligen Dreieck zur völligen Lösung aller Aufgaben genügen, sind nicht im Stande, uns aus dem einen den zweiten schiefen Winkel des sphärischen rechtwinkligen Dreiecks zu liefern; weil hier diese beiden Winkel nicht zusammen gleich 90°, wie bei dem ebenen sind, sondern größer als 90° sein müssen. Wir wollen daher, um den in Rede stehenden Winkel berechnen zu können, noch zwei weitere Formeln entwickeln.

Schreibt man nämlich die Formel (3) für die beiden Winkel B und C an, also:

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B,$$

und:

$$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C,$$

und multiplicirt beide, so entsteht:

$$\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = \sin b \sin c \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

oder:

$$\frac{1}{\cos b \cos c} = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

und mit Hülfe von (1):

$$\frac{1}{\cos a} = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

was man besser als:

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

anschreibt.

Setzt man ähnlich die beiden Formeln (4) und (2), die eine für den Winkel B die andere für C an, also daß:

$$\sin c = \sin a \sin C$$
$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B,$$

so entsteht, wenn die untere in die obere dividirt wird:

$$\cos c = \cos a \frac{\sin C}{\cos B};$$

setzt man nun statt $\cos a$ seinen Werth aus (1), so entsteht:

$$1 = \cos b \frac{\sin C}{\cos B},$$

oder:

$$\cos B = \cos b \sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

---

*) Daß dieß der Fall, wird der Lernende später einsehen.

Mit Hülfe dieser sechs Formeln kann man nun jede Aufgabe im rechtwinkligen Dreieck, die in der sphärischen Trigonometrie nicht so mannigfaltig, wie in der ebenen sind, lösen.

Hätte die dreikantige körperliche Ecke, an den beiden Flächen, welche senkrecht auf einander stehen, zwei Kantenwinkel gehabt, die größer als 90°, so hätten diese obigen sechs Formeln nicht auf dem Wege wie eben entwickelt werden können. Dieselben sind aber, wie man sich leicht aus Fig. (41) überzeugen kann, auch in diesem Falle gültig. Die Bogen der Katheten b und c, die größer als 90°, sind dort bis sie sich in A' zum zweitenmal treffen, verlängert, es sind alsdann b' und c' die Supplemente derselben also kleiner, als 90° und in der körperlichen Ecke A'BC der sphärische Winkel A' (wie A) ein rechter. Es ist mithin auch das rechtwinklige sphärische Dreieck A'BC ganz derselben Art, wie das oben in der Entwicklung gebrauchte. Da aber die Winkel B und C der eigentlich in Rede stehenden Ecke ABC die Supplemente der entsprechenden Winkel der Ecke A'BC sind und Supplementwinkel die Functionen bis auf das Vorzeichen gleich haben, so ist leicht einzusehen, daß, wenn die Zeichen übereinstimmen, die obigen Formeln auch für diese Ecke gültig sind.

In (1) nun wird z. B. cos b und cos c negativ, das Produkt also positiv, cos a aber ebenso;
in (2) bleiben alle Zeichen positiv:
in (3) wird tg b und tg B negativ, sin c positiv;
in (4) wird tg c und cos B negativ, tg a aber positiv;
in (5) wird cotg B und cotg C negativ, cos a aber positiv;
in (6) endlich wird cos b und cos B negativ, sin C aber positiv. —

Es kann hier noch bemerkt werden, daß man diese sechs Formeln leicht dem Gedächtniß einprägen kann. Betrachtet man nämlich mit Uebergehung des bekannten rechten Winkels nur die in Betracht kommenden fünf Stücke des rechtwinkligen Dreiecks und zwar in der Reihenfolge, wie sie in der Figur enthalten sind, z. B. a, B, c, b, C, so kann man z. B. von a ausgehend die Winkel B und C die anliegenden und die Katheten b und c die nicht anliegenden Stücke oder, von b ausgehend, den Winkel C und die Kathete c (weil A übersehen wird) die anliegenden, die andern die nicht anliegenden Stücke rc., nennen und hat so nur folgende zwei Regeln, statt jener sechs Formeln zu behalten.

Der Cosinus irgend eines Stücks ist gleich:

1) dem Produkt der Cotangenten der anliegenden Stücke, und
2) dem Produkt der Sinus der nicht anliegenden Stücke.

Es werden jedoch bei den Katheten alle die betreffenden Functionen mit ihren Cofunctionen vertauscht, so daß Cotangente in Tangente, Sinus in Cosinus übergeht.

Anmerk. 1) Im Falle man ein Dreieck hat, das zwar nicht rechtwinklig, dessen eine Seite aber $= 90^0$, (ein sogenanntes Quadrantendreieck) so ist das Supplementardreieck desselben ein rechtwinkliges; man kann also die bekannten Stücke in demselben in ein solches übertragen und die unbekannten entsprechend mit Hülfe der obigen Formeln für das rechtwinklige Dreieck ausrechnen, und dann wieder zu dem ursprünglichen Dreieck zurückkehren.

2) Aus den obigen Formeln lassen sich, so fern wir ihnen a priori allgemeine Gültigkeit zugestehen, einige Schlüsse auf die Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke machen, oder umgekehrt findet ihre allgemeine Gültigkeit nur statt, wenn folgende Sätze wahr sind:

a) aus Formel (1) die Hypothenuse ist nie kleiner als 90^0, sobald die Katheten beide kleiner oder beide größer als 90^0; ist die eine größer, die andere kleiner als 90^0, so ist die Hypothenuse ebenfalls größer als 90^0 (folgt aus dem Zeichen der Cosinus).

b) Aus (5) folgt Aehnliches zwischen der Hypothenuse und den beiden Winkeln.

c) Die Formeln (3) und (6) zeigen, da der Sinus eines Winkels, sowie einer Kathete (weil beide unter 180^0 bleiben) immer positiv, daß die Kathete und der gegenüberliegende Winkel immer gleichartig, d. h. zugleich beide kleiner und zugleich beide größer als 90^0 sind. — Ist eine Kathete, z. B. $b = 90^0$, so ist $\cos b = 0$ und es folgt $\cos B = 90^0$; das Dreieck hat zwei rechte Winkel und ist gleichschenklig ꝛc. —

§. 49. Die Formeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck.

Um nun die Formeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck zu erhalten, verfahren wir ganz analog dem §. 42, zertheilen nämlich das Dreieck ABC, Fig. (42) durch einen senkrechten Bogen BD in zwei rechtwinklige Dreiecke ABD und CBD. Wir haben dann aus Dreieck BCD mit (2):

$$\sin BD = \sin a \ \sin C$$

und aus Dreieck ABD mit derselben Formel:

$$\sin BD = \sin c \ \sin A,$$

also:

$$\sin a \ \sin C = \sin c \ \sin A$$

und:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Hätten wir die Senkrechte auf BC gefällt, so wäre ebenso entstanden:

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

also ist allgemein:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

oder: Die Sinus der Seiten stehen zu den Sinus der gegenüberliegenden Winkel in constantem Verhältniß. Eine Formel, welche der (18) §. 42 entspricht. —

Wäre das Dreieck ein stumpfwinkliges gewesen und die Höhe BD dadurch außerhalb des Dreiecks gefallen, so würde die Entwicklung, analog der entsprechenden des §. 42, dieselbe Formel (7) gegeben haben.

Zur Ermittlung der Formel der sphärischen Trigonometrie, welche der (19) des §. 42 entspricht, gehen wir den dort nur angedeuteten zweiten Weg, indem wir nach dem Gang des §. 4 der algebraischen Geometrie zuerst die Formel hier aufsuchen, welche jener (10) dieses Paragraphen 4 entspricht.

Zu dem Ende haben wir aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD:

$$\cos a = \cos BD \cos CD$$

und aus Dreieck ABD:

$$\cos c = \cos BD \cos AD,$$

durch Division entsteht:

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos CD}{\cos AD} \text{ *)}$$

da nun CD = b — AD ist, erhalten wir:

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos (b - AD)}{\cos AD}$$

oder:

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \cos b + \sin b \text{ tg } AD$$

und:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \cos c \text{ tg } AD$$

tg AD ist aber nach (4) = tg c cos A, also:

---

*) Eine Formel, die der (8) des §. 4 entspricht.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

eine Formel, welche der (19) des §. 42 analog ist.

Die der (20) des §. 42 entsprechende Formel zu erhalten, haben wir nach (3):

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} BD}{\sin AD}$$

ist es aber:

$$\sin AD = \sin (b - CD) = \sin b \cos CD - \cos b \sin CD,$$

sodann nach (1):

$$\cos CD = \frac{\cos a}{\cos BD},$$

und endlich wieder nach (3):

$$\sin CD = \frac{\operatorname{tg} BD}{\operatorname{tg} C};$$

also ist hiermit:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} BD}{\sin b \dfrac{\cos a}{\cos BD} - \cos b \dfrac{\operatorname{tg} BD}{\operatorname{tg} C}} = \frac{\sin BD}{\sin b \cos a - \dfrac{\cos b \sin BD}{\operatorname{tg} C}}.$$

Da nun aber nach (2):

$$\sin BD = \sin a \sin C \text{ ist:}$$

so entsteht:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin a \sin C}{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C} \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

eine Formel, welche dazu dienen kann, aus 2 Seiten (a und b) und dem eingeschlossenen Winkel (C) direct einen der fehlenden Winkel (hier A) zu berechnen. Für den andern Winkel B hätte man auf ganz analogem Wege gefunden:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin b \sin C}{\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C} \quad . \quad . \quad . \quad (10).^{*)}$$

Diese drei, den (18), (19) und (20) der ebenen Trigonometrie entsprechenden, Formeln, genügen hier nicht zur Lösung des Dreiecks; einestheils weil die Gleichung für die Winkelsumme fehlt, also aus zwei Winkeln der dritte nicht so einfach gefunden werden kann, wie in der ebenen Geometrie, anderntheils weil das sphärische Dreieck auch durch seine drei Winkel gegeben sein kann.

Leicht erhält man nun aus den obigen Formeln die hier noch fehlenden durch Anwendung des Supplementar- oder Polardreiecks;

---

*) Die Formeln (7), (9) und (10) bleiben dieselben, wenn auch das Dreieck ABC einen stumpfen Winkel hat.

da nämlich zu jedem sphärischen Dreieck ein Supplementardreieck gedacht werden kann, und umgekehrt jedes sphärische Dreieckals Supplementardreieck eines andern angesehen werden darf, so kann man in jeder der obigen Formeln $a = 180 - A'$ und $A = 180 - a'$ ꝛc. setzen, indem dieselben alsdann Geltung und Bedeutung für das Supplementardreieck deßjenigen, was bei der Entwicklung vorlag, erhalten. Die Formel (7) verwandelt sich hierdurch nicht, aber (8) wird zu:

$$-\cos A' = \cos B' \cos C' - \sin B' \sin C' \cos a'$$

oder mit Weglassung der Accente:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Aehnlich verwandelt sich (9) in:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin A \sin c}{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c} \quad . \; . \quad (12)$$

und aus (10) ergibt sich:

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin B \sin c}{\cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c} \quad . \; . \quad (13).$$

Aus den bis hierher gefundenen Formeln kann man ähnlich, wie bei dem ebenen Dreieck, eine Reihe anderer entwickeln; doch wird sich bei dieser Entwicklung der wesentliche Unterschied zwischen dem ebenen und sphärischen Dreieck, der in Bezug auf die Winkelsumme besteht, geltend machen.

Geht man von (7):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

aus und entwickelt analog den Formeln (21) und (22) §. 42, so entsteht:

$$\frac{\sin b + \sin b}{\sin c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C}$$

oder:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} \quad . \; (\mathfrak{A})$$

und ähnlich:

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C}$$

oder:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} \quad . \; . \quad (\mathfrak{B}).$$

Obgleich nun diese beide Formeln in ihrer Herleitung die größte Aehnlichkeit mit (21) und (22) des §. 42 haben, so hat doch die dort stattfindende Reduction, indem $\sin \frac{1}{2}(A + B) = \cos \frac{1}{2} C$ ꝛc. ist, hier

nicht statt und dieselben müssen einstweilen hier unter der obigen halb vollendeten Form bleiben, bis wir den entsprechenden Zusammenhang zwischen den Functionen der Winkel $\frac{1}{2}$ (A + B) und $\frac{1}{2}$ C auf anderem Wege hergeleitet haben.

Gehen wir zu dem Ende von der Formel (8):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

aus, so entsteht durch Auflösen in Bezug auf cos A:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad \ldots\ldots \quad (14),$$

wodurch der Winkel A aus den drei Seiten sich ergibt. Wir können aber diese Gleichung in ähnlicher Weise, wie mit der entsprechenden im §. 42 geschah, weiter verwandeln. Sie gibt nämlich:

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c}{\sin b \sin c},$$

oder:

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c};$$

wendet man auf den Zähler der rechten Seite die Formel (27) §. 37 an, indem hier a statt des dortigen B und b + c statt des dortigen A steht, so ist:

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b \sin c},$$

oder:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (b+c-a)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots \quad (15).$$

Dieser Ausdruck geht weiter, wenn $\frac{1}{2}$ (a + b + c) = s gesetzt wird (pag. 7), in:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

über und entspricht der Formel (25) des §. 42.

Aus (14) kann man aber auch auf analoge Weise entwickeln:

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

oder:

$$1 - \cos A = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

und:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}} \quad . \quad . \quad (17)$$

oder endlich:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

was der Formel (26) des §. 42 entspricht. —

Ganz auf demselben Wege kann man aus der Formel (11) dieses Paragraphen erhalten:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und:

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{\sin B \sin C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Da in (19) $S = \frac{1}{2}(A + B + C)$ größer als 90^0 ist, so ist $\cos S$ eine negative Größe, erfordert also das — Zeichen, um einen reellen Wurzelwerth zu geben, indem $S - A = \frac{1}{2}(B + C - A)$ kleiner als 90^0, also $\cos(S-A)$ positiv ist. Dieß letztere noch klarer zu machen bedenken wir, daß im Supplementardreieck $b + c > a$, also

hier: $180^0 - B' + 180^0 - C' > 180^0 - A'$

oder: $90^0 > \frac{1}{2}(B' + C' - A')$.*)

Suchen wir nun mit Hülfe der Ausdrücke (16) und (18) jenen Zusammenhang zwischen den im ebenen Dreieck gleichen Werthen $\sin \frac{1}{2}(A + B)$ und $\cos \frac{1}{2} C$, sowie zwischen $\cos \frac{1}{2}(A + B)$ und $\sin \frac{1}{2} C$ zu ermitteln, so ist zunächst:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B + \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B$$

also durch (16) und (18):

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c} \cdot \frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$
$$+ \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c} \cdot \frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin a \sin c}}$$

oder:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin(s-b) + \sin(s-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}};$$

---

*) Die Formel (20) und (19) hätten auch aus (18) und (16), resp. (17) und (15) mit Hülfe des Supplementardreiecks gefunden werden können. Da (11) aus (8) ebenso gefunden wurde. Wir überlassen beide Entwicklungen aus, zur Uebung, dem Lernenden.

$\sin(s-b) + \sin(s-a)$ aber wird durch Anwendung der Formel (24) der Goniometrie (§. 16), wenn $A = (s-b)$ und $B = (s-a)$ gesetzt wird, zu: $= 2\sin[s - \frac{1}{2}(a+b)]\cos\frac{1}{2}(b-a)$, oder zu: $2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)$; und die Wurzelgröße:

$$\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

ist, nach der obigen Formel (16), gleich $\cos\frac{1}{2}C$. Es ist mithin:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad (21).$$

Aehnlich findet man:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B$$

$$= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}\cdot\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$

$$- \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}\cdot\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}$$

$$= \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Dieser letzte Ausdruck wird durch ähnliche Verwandlung wie oben zu:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad (22).$$

Wendet man die so erhaltenen Werthe nun an, um die obigen Ausdrücke (A) und (B) zu reduciren, so ist zuerst aus (A), wenn man für $\sin\frac{1}{2}(A+B)$ den Werth aus (21) setzt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad (23),$$

und dann aus (B), wenn man für $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ den Werth aus (22) setzt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}c}$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Man hätte übrigens die Formeln (23) und (24) auf demselben Weg wie (21) und (22) aus (16) und (18) finden können, was wir als Uebung ebenfalls dem Lernenden empfehlen.

Diese vier zuletzt erhaltenen Formeln, welche wir, weil sie zusammengehörig sind, hier noch einmal hinter einander folgen lassen, sind unter dem Namen „die Gauß'schen" Formeln bekannt:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \cos \tfrac{1}{2} C \quad . \; . \; . \quad (21)$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2} C \quad . \; . \; . \quad (22)$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A-B) \sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2} C \quad . \; . \; . \; . \quad (23)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A-B) \sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \cos \tfrac{1}{2} C \quad . \; . \; . \; . \quad (24).$$

Leicht folgen nun durch entsprechende Divisionen dieser einzelnen unter einander folgende vier unter dem Namen „die Neper'schen Analogien" bekannte Formeln.

Nämlich aus (21) und (22):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)} \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C \quad . \; . \; . \quad (25),$$

aus (24) und (23):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C \quad . \; . \; . \quad (26);$$

sodann aus (23) und (22):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c \quad . \; . \; . \; . \quad (27)^{*}),$$

und endlich aus (24) und (21):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c \quad . \; . \; . \; . \quad (28).$$

§. 50. **Aufgaben über die Formeln der sphärischen Trigonometrie.** Die Aufgaben, welche eine Anwendung der Formeln der sphärischen Trigonometrie erfordern, haben, wie die in §. 47 auseinandergesetzte Natur der Sache mit sich bringt, theils das körperliche, theils das sphärische Dreieck als Grundlage. Für die ersten bieten sich Anwendungen genug in der reinen Mathematik dar, während für das eigentlich sphärische Dreieck solche besonders in der sphärischen Astronomie vorkommen.

---

*) Da $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c$ und $\cos \frac{1}{2}(A-B)$ positive Größen sind, so müssen $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$ und $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ gleiche Zeichen haben, mithin $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(A+B)$ zu gleicher Zeit beide größer oder beide kleiner als 90° sein. —

Es mag nun hier die Betrachtung der beiden Fälle, wo die Lösung das sphärische Dreieck wegen der Art seiner Bestimmungsstücke zweifelhaft läßt, allem Uebrigen vorausgehen; es kann dieses der Fall sein, wenn zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel und ebenso wenn zwei Winkel und die dem einen gegenüberliegende Seite gegeben.

Betrachtet man im ersteren dieser beiden Fälle a, c und A als bekannt, so ist:

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a},$$

wo, ebenso wie bei dem ebenen Dreieck, sin C für zwei Winkel, den spitzen C_1 und den stumpfen C_2, gilt. Ob hier die Aufgabe zweifelhaft oder unzweifelhaft, wird ähnlich wie §. 43 oder wie der betreffende Fall beim ebenen Dreieck in der Elementargeometrie untersucht.

Betrachten wir diese verschiedenen Fälle an der Fig. 43, wo BAE der Winkel A und der Bogen AB = c ist; der andere Schenkel von A ist über E hinaus zum vollen Kreis verlängert, so daß in derselben Figur auch der stumpfe Nebenwinkel von A, nämlich BAE′, vorkommt, da dessen Sinus unter dem sin A der obigen Formel ebenfalls verstanden werden kann.

Ist $\sin c \sin A > \sin a$, so ist der Werth $\sin C > 1$, also C unmöglich; ist aber $\sin c \sin A = \sin a$, so ist $C = 90^0$ und a die Kathete BD des rechtwinkligen Dreiecks ABD (Fig. 43). Es darf also hier wie im ebenen Dreieck die Seite a nicht kleiner sein, als die Senkrechte, die aus dem Endpunkte von c auf den andern Schenkel des Winkels gefällt werden kann. Da das obige $\sin a = \sin c \text{ sis } A$ sowohl für a = BD, als auch für $a = BD' = 180 - BD$ (Fig. 43) stattfindet und:

$$\sin a < \sin c \sin A \text{ für } a < BD \text{ oder } a > BD',$$

so ist also die Möglichkeit von a in den Gränzen größer oder gleich BD und gleich oder kleiner als $180^0 - BD$ eingeschlossen. Der letzte Fall kommt, sobald die dritte Seite b nicht größer als 180^0 sein darf, nur dann, und zwar allein, in Betracht, wenn A der stumpfe Winkel BAE′ ist. Leicht ist nun aus Formel und Figur analog §. 43 weiter zu ersehen, daß für $A < 90^0$ und $a < c$, die Seite a die beiden Lagen BC′ und BC″ annehmen kann; für $a \geqq c$ kann dieselbe aber nur die Lagen BC (= BA) und andere wie BC^{III}, aber nur bis BA′ annehmen, indem BC^{VI} die Seite AC^{VI} größer als 180^0 ergeben würde.

Es kann also a, wenn es auch größer als c ist, doch nicht größer als $180^{\circ} - c$ sein, weil es sonst entweder ganz unmöglich würde, oder doch die Seite b g ößer als 180° ergäbe.

Für $A > 90^{\circ}$ muß a größer als c sein und hat zwischen den Gränzen $a = c$ bis $a = 180^{\circ} - c$ unzweifelhafte Lagen, wie BC^{IV}; für $a > 180^{\circ} - c$ ($180^{\circ} - c = BA'' = BA'$) ist es wieder in der Lage zweifelhaft als BC^{V} und BC^{VI}, wenn es nicht in $a = BD'$ sein Maximum erreicht, oder als $a > BD'$, wie oben gezeigt wurde, unmöglich wird.

Die Uebersicht über alle diese Fälle ist also folgende:

Für c kleiner als ein Quadrant:

I. $A < 90^{\circ}$; 1) $a < BD$ unmöglich ($\sin BD = \sin c \sin A$);

2) $a = BD$ bestimmt, rechtwinkliges Dreieck;

3) $a \begin{array}{l} > BD \\ < c \end{array}$ zweifelhaft.

4) $a = c$ bestimmt, gleichschenkliges Dreieck;

5) $a \begin{array}{l} > c \\ < 180^{\circ} - c \end{array}$ bestimmt;

6) $a = 180^{\circ} - c$ wird $b = 180^{\circ}$, die Figur ein bestimmtes Zweieck;

7) $a > 180^{\circ} - c$
und dabei $\leqq 180^{\circ} - BD$ (nur möglich, wenn $b > 180^{\circ}$ sein dürfte;

8) $a > 180^{\circ} - BD$ unmöglich.

II. $A > 90$; 1) $a \leqq c$ unmöglich;

2) $a \begin{array}{l} > c \\ < 180^{\circ} - c \end{array}$ bestimmt, wenn b nicht größer als 180° sein darf;

3) $a = 180^{\circ} - c$ bestimmt, in denselben Fall;

4) $a \begin{array}{l} > 180^{\circ} - c \\ < 180^{\circ} - BD \end{array}$ zweifelhaft;

5) $a = 180^{\circ} - BD$ bestimmt, rechtwinkliges Dreieck;

6) $a > 180^{\circ} - BD$ unmöglich.

Für c größer als ein Quadrant, d. h. gleich $A'B$, ergibt sich die Gestaltung der verschiedenen Fälle auf ganz ähnlichem Wege, wie hier oben.

In den beiden bestimmten Fälle I. 5 und II. 2, wo beim ebenen Dreieck der annehmbare Winkel sich so leicht von dem andern unter-

scheiden läßt, muß hier die eine Formel, welche aus den beiden Neper'schen Analogien (25) und (26) durch Division entsteht, zu Hülfe genommen werden. Man hat nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - C)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - c)}.$$

Da nun $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-c)$, weil in dem Falle $a > c$ auch $\frac{a-c}{2} > 90^0$, und positiv, selbst immer positiv ist und mit $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-C)$ dasselbe der Fall, sodann im Falle $a < c$ auch $A < C$, also $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-c)$ mit $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-C)$ zugleich negativ, so müssen $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+C)$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+c)$ einerlei Zeichen haben.

Diese Discussion mag als Maßgabe dienen, wie in ähnlichen Fällen zu verfahren ist. Es ist übrigens der zweite der oben bezeichneten Fälle: wo zwei Winkel und eine Gegenseite gegeben, auf den eben besprochenen mit Hülfe des Supplementardreiecks zurückzuführen. —

Folgende Aufgaben, welche mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie gelöst werden können, empfehlen wir dem Lernenden:

1) Den Flächenwinkel des Tetraëder's zu bestimmen.

Da an jeder Ecke des Tetraëder's drei gleiche gleichseitige Dreiecke zusammenstoßen, so sind also alle Kantenwinkel an jeder Ecke desselben gleich 60^0 und wir haben nach Formel (16):

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}},$$

da $s = \frac{60^0 + 60^0 + 60^0}{2} = 90^0$ und $s - a = 30^0$ ist:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin 30^0}{\sin^2 60^0}};$$

da nun $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, so ist:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}. —$$

2) Den Flächenwinkel des Dodekaëder's zu bestimmen.

An jeder Ecke des Dodekaëder's stoßen drei regelmäßige Fünfecke zusammen, d. h. drei Winkel von 108^0; wir haben also nach derselben Formel wie unter 1):

$$s = \frac{3 \cdot 108^0}{2} = 162^0 \text{ und } s - a = 54^0,$$

also:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin 18^0 \ \sin 54^0}{\cos^2 18}},$$

weil $162^0 = 180^0 - 18^0$ und $108^0 = 90^0 + 18^0$ ist. —

3) Den Flächenwinkel des Octaëders zu bestimmen.

An jeder Ecke des Octaëders stoßen vier gleichseitige Dreiecke zusammen, da aber nun alle unsere Formeln sich nur auf die dreikantige Ecke beziehen, so müssen wir eine Ebene durch zwei der gegenüberliegenden Kanten legen und haben dann eine dreikantige Ecke, die zwei Kantenwinkel von 60^0 und einen von 90^0 enthält. Also nach derselben Formel wie unter 1) und 2):

$$s = \frac{2 \cdot 60^0 + 90^0}{2} = 105^0 \text{ und } s - a = 15^0,$$

da a, als den gesuchten Winkel A gegenüberliegend, der Kantenwinkel von 90^0 sein muß. Also:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos 15^0 \sin 15^0}{\sin^2 60}} = \sqrt{\frac{\sin 30^0}{2 \cos^2 30^0}},$$

oder:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}}{2\,(1-\tfrac{1}{4})}} = \sqrt{\frac{1}{3}}. \text{ —}$$

4) Den Flächenwinkel des Ikosaëders zu bestimmen.

An jeder Ecke des Ikosaëders stoßen fünf gleichseitige Dreiecke zusammen; eine Schnittfläche, welche durch zwei der Kanten des Ikosaëder gelegt werden kann, ist, wie die Stereometrie nachweist, ein regelmäßiges Fünfeck; also ist die dreikantige körperliche Ecke, mit welcher wir zu thun haben, aus zwei Kantenwinkel von 60^0 und einem von 108^0 zusammengesetzt. Wir haben also nach derselben Formel 16:

$$s = \frac{2 \cdot 60^0 + 108^0}{2} = 114^0 \text{ und } s - a = 6^0),$$

da a der Kantenwinkel von 108^0 sein muß; es ist hierdurch:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos 24^0 \ \sin 6^0}{\sin^2 60^0}}. \text{ —}$$

5) Eine Relation zwischen den Kantenwinkeln einer dreikantigen Ecke und dem Neigungswinkel einer Kante gegen die gegenüberliegende Fläche zu finden.

Die Neigung einer Graden zu einer Ebene wird durch den Winkel, den sie mit ihrer Projection auf dieser Ebene bildet, gemessen; wir haben also die gegebene Ecke mittelst einer durch die entsprechende

Kante gelegten projicirenden Ebene in zwei rechtwinklige körperliche Ecken zu zertheilen und den, beiden gemeinschaftlichen, Kantenwinkel zu suchen. Betrachten wir die vorgelegte körperliche Ecke als mit einem sphärischen Dreieck in Zusammenhang gebracht, so wird jener Kantenwinkel durch den senkrechten Bogen, der eine Höhe des Dreiecks vorstellt, repräsentirt. Wir haben nun, wenn a, b, c die Kantenwinkel (resp. Seiten des sphärischen Dreiecks), A, B, C die gegenüberliegenden Flächenwinkel (resp. Winkel des sphärischen Dreiecks) und H diesen Kantenwinkel in der senkrechten Ebene (resp. Höhe) bezeichnet:

$$\sin H = \sin a \sin C,$$

wo $\sin C$ durch die Formeln (16) und (18) leicht gefunden wird. Es ist also:

$$\sin H = \frac{2}{\sin b} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}. \text{ —}$$

6) Den körperlichen Inhalt einer dreiseitigen Pyramide zu finden, deren eine Ecke völlig gegeben, d. h. in welcher die Länge aller an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten, a′, b′, c′, und die drei von diesen gebildeten Kantenwinkel, gleich a, b, c, bekannt sind.

Hat man nach Aufgabe 5) den Winkel H, so ist die Höhe h der Pyramide, welche man zur Berechnung des Volumens braucht, aus ihm leicht zu finden; ist nämlich b′ die nach der Spitze laufende Kante, so ist:

$$h = b' \sin H;$$

da nun aber die Basisfläche durch die Kanten a′, c′ und dem Winkel b als $= \frac{a' c' \sin b}{2}$ bestimmt ist, so entsteht das Volumen:

$$V = \frac{a' c' \sin b}{2} \cdot \frac{b' \sin H}{3}$$

oder:

$$V = \frac{a' b' c'}{3} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}.$$

Für das Volumen des durch dieselben Stücke bestimmten dreiseitigen Prismas fällt nur der Nenner 3 hinweg. —

7) Die Figur und den Flächeninhalt der Diagonalschnitte in einem Parallelepiped zu bestimmen, wenn dessen eine Ecke völlig gegeben, indem a′, b′, c′ die Kantenlängen, wie in 6) und a, b, c die entsprechenden, d. h. diesen Kanten gegenüberliegenden, Kantenwinkel sind.

Zur Bestimmung der Figur eines Diagonalschnittes haben wir die Bestimmung eines Winkels und einer Seite nöthig, weil er ein

Parallelogramm und seine eine Seite eine der Kanten (hier mag es b′ sein) ist. Die Bestimmung der einen Seite ist Sache der ebenen Trigonometrie, nämlich nach Fig. (44):

$$x = \sqrt{a'^2 + c'^2 + 2a'c' \cos b}.$$

Um aber den Winkel BDE = y zu suchen, haben wir in der neu entstandenen körperlichen Ecke DABE den Kantenwinkel ADE = z und den Flächenwinkel A an der Kante a′ erst zu berechnen; z findet man aus Formel (20) der ebenen Trigonometrie §. 42 als:

$$\operatorname{tg} z = \frac{a' \sin b}{c' + a' \cos b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

oder auch mit Hülfe des schon berechneten x:

$$\sin z = \frac{c' \sin b}{x};$$

weiter hat man:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \quad . \quad . \quad . \quad (II).$$

Es wird nun, nachdem also z aus der Gleichung (I) und A aus (II) bekannt ist:

$$\cos y = \cos c \cos z + \sin c \sin z \cos A.$$

Aehnlich wird jeder andere Diagonalschnitt gefunden. —

8) Die Diagonallinien des Parallelepiped's der Aufgabe 7) zu finden.

Nach Fig. (44) und Aufgabe 7 sind zur Ermittlung der einen Diagonallinie, z. B. BE = w die Seiten x und b′, sowie der eingeschlossene Winkel y des Parallelogramms bekannt, was genügt.

9) Die Neigung des Diagonalschnitts gegen die Grundfläche in dem Parallelepiped der Aufgabe 7) zu finden.

Es erfordert hier weiter nichts, als nach Figur (44) den Winkel an der Kante x in der dreikantigen körperlichen Ecke DABE die schon in Aufgabe 7) in Betracht kam und den Kantenwinkel y lieferte, zu finden. Nimmt man y als bekannt an, so hat man die drei Kantenwinkel bekannt und rechnet nach Formel (16); will man aber aus den Kantenwinkeln c, z und dem Flächenwinkel A die gesuchte Neigung erhalten, so kann dieß nach Formel (9) und auch (25) und (26) geschehen. —

10) In einer gleichseitigen Pyramide von n Seiten ist jeder der Kantenwinkel an der Spitze = α gegeben, man soll daraus alle übrigen Kantenwinkel und alle Flächenwinkel bestimmen.

Da die Pyramide gleichseitig, so sind alle Seitendreiecke gleichschenklig, alle enthalten den Kantenwinkel α an der Spitze und unten die Kantenwinkel $90^0 - \frac{\alpha}{2}$; die Basis ist ein regelmäßiges n=Eck, also deren Umfangwinkel $= 180^0 - \frac{360^0}{n}$. Hiermit sind alle Kan= bestimmt. Die Flächenwinkel an den Ecken der Basis gehen aus derselben Formel, die unter 1) bis 4) gebraucht wurde, hervor, da die drei Kantenwinkel in jeder resp.: $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\alpha}{2}$ und $180^0 - \frac{360^0}{n}$ sind. Die Flächenwinkel an der Spitze sind einander gleich; aber es ist dieselbe von einer n=kantigen körperlichen Ecke gebildet, so daß durch zwei entsprechende Kanten derselben eine Schnittebene gelegt werden muß, damit eine dreikantige körperliche Ecke entstehe; zwei Kantenwinkel dieser sind letzteren nun $= \alpha$, der dritte aber, der y heißen mag, muß durch weitere Rechnung gefunden werden. Setzt man, dieß zu bewerkstelligen, die Kantenlänge von der Spitze zur Basis $= 1$, so ist jede Seite der Basis $= 2 \sin \frac{1}{2} \alpha$; an der Basisfläche schneidet aber unsere Hülfsschnittebene ein gleichschenkliges Dreieck ab, dessen beiden Seiten also $= 2 \sin \frac{1}{2} \alpha$ und dessen einer Winkel (der eingeschlossene) $= 180^0 - \frac{360^0}{n}$. Mit Hülfe der Formel:

$$\frac{x}{2} = 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sin \left(90^0 - \frac{180^0}{n}\right)$$

erhält man $\frac{x}{2}$ als die Hälfte der dritten Seite; da nun aber dieses x auch zu dem Dreieck gehört, was y enthält und zwar als gegenüberliegende Seite, während die beiden andern Seiten $= 1$ sind, so ist:

$$\tfrac{1}{2} x = \sin \tfrac{1}{2} y$$

und:

$$\sin \tfrac{1}{2} y = 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \cos \frac{180^0}{n},$$

wodurch nun y und der Flächenwinkel selbst leicht bekannt. —

11) Die Projection eines gegebenen Winkels α auf die Horizontalebene zu finden, wenn dessen Schenkel, die Neigungen β und γ gegen diese Ebene haben.

Die vier Stücke α, β, γ und x, Figur (45) bilden eine vierkantige körperliche Ecke. Die sie repräsentirenden Bogen liegen also in einem sphärischen Viereck; um nun hier ein Dreieck zu erhalten, hat

man nichts zu thun, als die Senkrechte AZ auf der Horizontalebene in A zu errichten und die Bogen der Winkel β und γ bis Z zu verlängern. Es ist alsdann der Winkel bei Z im Dreieck BCZ gleich x, während die Seiten desselben gleich: $90^0 - \beta$, $90^0 - \gamma$ und α bekannt sind. —

12) Die Neigung der Ebene des Winkels α der Aufgabe 11) gegen die Horizontalebene zu finden.

Ist in Figur (45) die Linie AD die Schnittkante beider Ebenen, so ist y der gesuchte Winkel; also wird, wenn Winkel CAD = z gesetzt wird, im rechtwinkligen Dreieck DCC':

$$\sin\gamma = \sin y \sin z$$

und im rechtwinkligen Dreieck DBB':

$$\sin\beta = \sin y \sin(z+\alpha),$$

woraus:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin(z+\alpha)}{\sin z}$$

$$\frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{\sin(z+\alpha) - \sin z}{\sin(z+\alpha) + \sin z}$$

oder:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \operatorname{cotg}\left(z+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

und:

$$\operatorname{cotg}(z+\tfrac{1}{2}\alpha) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Nachdem hieraus z bekannt ist, erhält man:

$$\sin y = \frac{\sin\gamma}{\sin z}.$$

Man hätte auch y direct erhalten können. Es ist nämlich:

$$\sin\beta = \sin y \sin z \cos\alpha + \sin y \cos z \sin\alpha,$$

oder da $\sin y \sin z = \sin\gamma$:

$$\sin\beta - \sin\gamma \cos\alpha = \sin y \cos z \sin\alpha;$$

da nun aber auch für $\cos y$ der Werth durch $\sin z$ ausgedrückt werden soll, muß man umordnen und quadriren und hat so:

$$\sin^2 y \cos^2 z = \left(\frac{\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

oder:

$$\sin^2 y\left(1 - \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 y}\right) = \left(\frac{\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

und:

$$\sin^2 y - \sin^2\gamma = \left(\frac{\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \text{ rc. —}$$

13) Eine Relation zwischen den sechs Flächenwinkel einer dreiseitigen Pyramide zu finden.

Es sind A, B, C die Flächenwinkel an der Grundfläche, a, b, c die entsprechenden, resp. gegenüberliegenden Kantenwinkel derselben, D, E und F die Flächenwinkel der übrigen drei Kanten, wobei D an der Kante, die durch den Scheitel von c geht, E ebenso an der, die durch den von a geht, liegen soll. — Da wir die verlangte Relation nur mit Beihülfe der Kantenwinkel erhalten können, so suchen wir zuerst eine solche einfache zwischen den Kantenwinkel a, b, c unter denen der ebenen Trigonometrie §. 40, wo die Relationen zwischen den Winkeln eines ebenen Dreiecks gefunden wurden, aus, und führen dann die Werthe für deren Functionen, durch die der Flächenwinkel ausgedrückt, ein. Da man aber den Cosinus der Kantenwinkel am leichtesten durch den Flächenwinkel ausdrückt, so nehmen wir die Relation:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1$$

aus jenem §. 40 zu Hülfe. Wir haben dann weiter:

$$\cos a = \frac{\cos E + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos F + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos D + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Setzen wir diese Werthe in obige Formel ein und bringen auf gleiche Benennung, so entsteht:

$$1 = \frac{\sin^2 A (\cos E + \cos B \cos C)^2 + \sin^2 B (\cos F + \cos A \cos C)^2 + \sin^2 C (\cos D + \cos A \cos B)^2}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}$$

$$+ \frac{2(\cos E + \cos B \cos C)(\cos F + \cos A \cos C)(\cos D + \cos A \cos B)}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C};$$

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 = \sin^2 A (\cos E + \cos B \cos C)^2 + \sin^2 (\cos F + \cos A \cos C)^2$$
$$+ \sin^2 C (\cos D + \cos A \cos C)^2$$
$$+ 2(\cos E + \cos B \cos C)(\cos F + \cos A \cos C)(\cos D + \cos A \cos B).$$

Durch Ausführung der Quadrate und indem man für $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$ ihre entsprechende Werthe $1 - \cos^2 A$, $1 - \cos^2 B$ und $1 - \cos^2 C$ einsetzt, erhält man nach geschehener Reduction:

$$0 = \cos^2 E - \cos^2 A \cos^2 E + \cos^2 F - \cos^2 B \cos^2 F + 2 \cos B \cos C \cos E$$
$$+ 2 \cos A \cos C \cos F + \cos^2 D - \cos^2 C \cos^2 D + 2 \cos D \cos A \cos B$$
$$+ 2 \cos E \cos F \cos D + 2 \cos A \cos C \cos D \cos E + 2 \cos A \cos B \cos E \cos F$$
$$+ \cos^2 A - 1 + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos B \cos C \cos D \cos F,$$

woraus durch Ordnen die gesuchte Relation entspringt:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D + \cos^2 E + \cos^2 F$$
$$= 1 + \cos^2 A \cos^2 E + \cos^2 B \cos^2 F + \cos^2 C \cos^2 D - 2\cos B \cos C \cos E$$
$$- 2\cos A \cos C \cos F - 2\cos A \cos B \cos D - 2\cos D \cos E \cos F$$
$$- 2\cos A \cos C \cos D \cos E - 2\cos A \cos B \cos E \cos F$$
$$- 2\cos B \cos C \cos D \cos F. -$$

14) Die kürzeste Entfernung e zweier Orte A und B, die auf der Oberfläche der Erde in den geographischen Längen l und l′ und den geographischen Breiten b und b′ liegen, zu berechnen, wenn angenommen werden darf, daß die Erdoberfläche eine Kugel und daß die kürzeste Entfernung zweier Punkte einer Kugelfläche durch den zwischen ihnen enthaltenen Bogen eines größten Kreises gemessen wird.

Man hat zur Lösung dieser Aufgabe, wenn die Meridiane der beiden Erdorte von A und B an bis zum Pol P der Erde in Betracht gezogen werden, ein sphärisches Dreieck ABP, dessen dritte Seite der zwischen A und B gelegene Bogen eines größten Kreises, also die unbekannte Entfernung e selbst ist. Die beiden andern Seiten sind $90^0 - b$ und $90^0 - b'$, und der von ihnen eingeschlossene Winkel am Pol, der durch den zwischen den beiden Meridianen im Aequator befindlichen Bogen gemessen wird, ist $l' - l$. Man hat also im sphärischen Dreieck ABP zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bekannt und sucht die dritte Seite. — Hierzu wendet man natürlich die Formel (8) an, und erhält:

$$\cos e = \cos(90^0 - b)\cos(90^0 - b') + \sin(90^0 - b)\sin(90^0 - b')\cos(l' - l)$$

oder:

$$\cos e = \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos(l' - l).$$

Drückt man nun den Winkel e in Graden und deren Dezimalen aus, was wir mit e^0 bezeichnen wollen, so ist die gesuchte Entfernung in geographischen Meilen $= 15 \cdot e^0$; weil auf jeden Grad eines größten Kreises der als Kugel betrachteten Erde 15 geographische Meilen gerechnet werden.

15) Wenn die senkrechte Höhe eines Sternes S (Fig. 46) über dem Horizont HR eines Erdortes C gleich $SF = h$ für einen gewissen Zeitmoment bekannt ist, und man außerdem die Declination dieses Sterns, d. h. seinen senkrechten Bogenabstand BS, vom Himmelsäquator AQ gleich d kennt, so soll man den Stundenwinkel dieses Sternes für jenen Zeitmoment bestimmen oder mit andern Worten die Zeit berechnen, welche von da bis zu seiner Stellung in der Mittagslinie (jenes Ortes) verstreicht.

Verlängert man, um hier das zur Lösung nothwendige sphärische Dreieck zu bekommen, die beiden Bogen BS und FS bis zu 90^0, also

resp. bis Z und P, wo Z das Zenith und P den Pol der Himmelskugel bedeutet, so sind beide Bogen ZS und PS, resp. gleich als $90^0 - h$ und $90^0 - d$ bekannt, und es fehlt zum Dreieck SPZ nur noch der Bogen zwischen P und Z, der über P hinaus bis R verlängert die Länge von 90^0 bekommt, so daß $PZ = 90^0 - PR$ ist. Der Bogen PR ist aber die constante Höhe des Himmelspoles über dem Horizont, also eine Größe, die wir als bekannt voraussetzen dürfen; nennen wir sie φ, so ist $PZ = 90^0 - \varphi$. Es sind mithin in dem sphärischen Dreieck SPZ die drei Seiten bekannt, und wir sind im Stande, jeden der drei Winkel auszurechnen. Betrachten wir aber nun die Bewegung des Stern S bis zu seiner Stellung in der Mittagslinie HAZPR des Ortes (die durch dessen Zenith Z und den Himmelspol P bestimmt ist), so wird dieser Weg offenbar durch den Winkel SPS′, resp. der Bogen AB im Aequator gemessen, denn alle in einem und demselben Breitenkreis BSP befindlichen Sterne gehen zusammen und erreichen zugleich die Mittagslinie. Diesen fraglichen Winkel $SPZ = \beta$ findet man aber mitHülfe der Formel (16), indem $s = \frac{1}{2}(90^0 - h + 90^0 - h + 90^0 - \varphi) = 135^0 - \frac{1}{2}(h + c + \varphi)$ ist, als:

$$\cos \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\{\sin[13^05 - \frac{1}{2}(h+d+\varphi)] \sin[45^0 - \frac{1}{2}(\delta+\varphi-h)]\}}{\cos d \cos \varphi}}$$

Hierdurch bekannt, ergibt β die in Frage stehende Zeit in Stunden, wenn es in Graden ausgedrückt mit 15^0 dividirt wird; weil in 24 Stunden der ganze Raum der Himmelskugel unter der Mittagslinie durchgeht, also in einer Stunde immer ein Zweieck, dessen Seiten Deklinationskreise sind, welche bei P einen Winkel von 15^0 bilden.

Einen speziellen Fall dieser Aufgabe bildet die Berechnung der Tageslänge für irgend einen gegebenen Tag des Jahres, resp. für irgend eine gegebene Declination d der Sonne. Es folgt hierbei die halbe Tageslänge aus dem Stundenwinkel, welche der Sonne zukommt, wenn sie eben aufgeht, d. h. wenn ihre Höhe $h = 0^0$ ist. Der Werth von β wird hier am besten aus der Formel (8) berechnet, indem durch $\cos 90^0 = 0$ sich dieselbe sehr einfach gestaltet; es ist nämlich:

$$0 = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos \beta$$

oder:

$$\cos \beta = - \operatorname{tg} d \operatorname{tg} \varphi.$$

Diese Formel zeigt, da $\varphi < 90^0$, daß, sobald d positiv, d. h. nördliche Declination ist, $\cos \beta < 0$, also $\beta > 90^0$, und daß nur für südliche Deklinationen (d negativ) $\beta < 90^0$ wird.

16) Das Azimuth α des in Aufgabe 15) bestimmten Sternes unter denselben Umständen zu berechnen.

Da man unter Azimuth den Fig. 46 von dem Verticalkreise FSZ des Sternes und der Mittagslinie des Ortes bei Z gebildeten Winkel SZP versteht, so ist nun in dem Dreieck der Aufgabe 15) der Winkel PZS $= \alpha$ zu berechnen, während alle Seiten, wie oben, bekannt sind. Es ist also:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left\{\frac{\sin[135^0 - \frac{1}{2}(h + d + \varphi)]\sin[45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - d)]}{\cos h \cos \varphi}\right\}}.$$

Betrachtet man das Azimuth bei dem Auf- oder Untergang des Sternes, also für h = 0, so ist nach Formel (8):

$$\sin d = \varphi \cos \alpha,$$

oder:

$$\cos \alpha = \frac{\sin d}{\cos \varphi};$$

eine Formel, welche zeigt, daß α nur dann größer als 90°, wenn d südliche (negative) Declination bedeutet.

Ist der betrachtete Stern die Sonne, so nennt man die Werthe: $\alpha - 90^0$ und $90^0 - \alpha$ die Morgen- und Abendweite.

17) Man soll aus der bekannten Declination d eines Sternes, und der geographischen Breite (Polhöhe) φ des Beobachtungsortes die Höhe h und das Azimuth α dieses Sternes für einen Zeitmoment, wo dessen Stundenwinkel = s bekannt ist, berechnen.

Es ist hier in Fig. (46) im Dreieck SZP, die Seite SZ = 90—h und der Winkel SZP $= \alpha$ unbekannt, während die Seiten PZ=90—φ und PS = 90 — d, nebst dem Winkel SPZ = s gegeben sind. — Man berechnet in diesem Falle den unbekannten Winkel mit Hülfe Neper'schen Anologien und dann die unbekannte Seite durch eine der Gauß'schen Formeln. Bezeichnen wir den Winkel PSZ, welcher der parallactische Winkel genannt wird, mit x, so ist nach den Formeln (25) und (26):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + x) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi - d)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi + d)} \operatorname{cotg}\frac{s}{2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - x) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - d)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi + d)} \operatorname{cotg}\frac{s}{2},$$

wodurch der Winkel α bekannt wird. Um nun die Seite SZ zu erhalten, gebrauchen wir eine der Formeln (21) bis (24) z. B. (23) und haben:

$$\sin\left(45^0 - \frac{h}{2}\right) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi + d)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)} \sin\frac{s}{2}.$$

Ist der Stundenwinkel nicht von vorn herein gegeben, sondern nur der Zeitmoment t, wann die Beobachtung gemacht werden soll, so kann man jenen auf folgende Art finden. Ist t′ der Zeitpunkt wo der Anfangspunkt der Rectascensionen V in der Mittagslinie steht und a die Rectasecension VB des Sternes, so ist $t' + \frac{a^0}{15_{04}}$ der Zeitpunkt, wo der Stern in der Mittagslinie stehen wird; also ist:

$$s^0 = 15_{04}\left(t' + \frac{a^0}{15_{04}} - t\right)$$

oder:

$$s^0 = 15_{04}\left(t - t' - \frac{a^0}{15_{04}}\right);$$

je nachdem t größer oder kleiner als $t' + \frac{a^0}{15_{04}}$ ist s westlich oder östlich von der Mittagslinie zu nehmen.

18) Man hat die beiden Zenithdistanzen (Complemente der Höhen) eines Sterns in den Momenten gemessen, wo er einen und denselben durch das Zenith gezogenen Vertikalkreis vor und nach seiner Culmination durchschnitt, und soll daraus die Polhöhe (geographische Breite) φ des Beobachtungsortes bestimmen.*)

Ist Figur (47) P der Pol, Z das Zenith, S jener Ort des Sterns vor der Culmination und S′ der nach derselben, so haben wir es mit den beiden Dreiecken ZPS und ZPS′ zu thun, in welchen die beiden Winkel SZP und S′ZP, die der Aufgabe gemäß zusammen 180⁰ betragen, vorkommen.

Wir haben daher zuerst:

$$\cos SZP = -\cos S'ZP,$$

und sodann:

$$\cos SZP = \frac{\sin d - \sin\varphi \cos z}{\cos\varphi \sin z}$$

und:

$$\cos S'ZP = \frac{\sin d - \sin\varphi \cos z'}{\cos\varphi \sin z'},$$

*) Diese Aufgabe ist zuerst von Professor Grunert behandelt worden. —

also:

$$\frac{\sin d - \sin \varphi \cos z}{\cos \varphi \sin z} = \frac{\sin \varphi \cos z' - \sin d}{\cos \varphi \sin z'}$$

oder:

$$\sin \varphi (\cos z \sin z' + \sin z \cos z') = \sin d (\sin z + \sin z')$$

und endlich:

$$\sin \varphi = \frac{\sin d (\sin z + \sin z')}{\sin (z + z')} = \frac{\sin d \cos \frac{1}{2} (z - z')}{\cos \frac{1}{2} (z + z')}$$

19) Aus der bekannten Deklination d und Rectascension a eines Sterns s, dessen Länge λ und Breite β zu finden, wenn die Neigung e der Ekliptik gegen den Aequator bekannt ist.

Ist Figur (48) AQ der Aequator und P dessen Pol, EK die Ekliptik und P′ deren Pol, so ist SB die Deklination d und SC die Breite β, BD die Rectascension a und CD die Länge λ, während der Winkel ADE, der durch den Bogen AE gemessen wird, gleich e bekannt ist. Um nun die bekannten und unbekannten Werthe in einem Dreieck zu vereinigen, betrachten wir die Complemente der Bogen BS und CS, nämlich PS und P′S; es ist alsdann im Dreieck PP′S die Seite PP′ $= AE = e$, $PS = 90^0 - d$ und $P'S = 90^0 - \beta$, während der Winkel $P'PS = 90^0 + a$ und $PP'S = 90^0 - \lambda$ ist. Man hat also nach den Formeln (25) und (26), wenn der unbekannte Winkel PSP′, der Positionswinkel genannt, gleich x gesetzt und auch mit in die Rechnung gebracht wird:

$$\operatorname{tg}[45^0 - \tfrac{1}{2}(\lambda + x)] = \frac{\sin [45^0 - \frac{1}{2}(d + e)]}{\sin [45^0 - \frac{1}{2}(d - e)]} \operatorname{cotg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}[45^0 - \tfrac{1}{2}(\lambda - x)] = \frac{\cos [45^0 - \frac{1}{2}(d + e)]}{\cos [45^0 - \frac{1}{2}(d - e)]} \operatorname{cotg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right),$$

woraus die Werthe von $\frac{\lambda + x}{2}$ und $\frac{\lambda - x}{2}$, und weiter λ und x selbst, bekannt werden.

Sodann hat man mit Hülfe dieser gefundenen Werthe:

$$\cos\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\cos [45^0 - \frac{1}{2}(d + e)]}{\sin [45^0 - \frac{1}{2}(\lambda - x)]} \cos\left(45^0 + \frac{a}{2}\right).$$

20) Die Dauer der astronomischen Dämmerung für einen gegebenen Tag und Ort zu berechnen, wenn für den Tag die Deklination d der Sonne bekannt ist.

Man nimmt an, daß die sogenannte astronomische Dämmerung dann aufgehört hat, wenn die Sonne 18⁰ unter dem Horizont steht, indem dann die Sterne sechster Größe bei völlig klarem Himmel mit bloßem Auge sichtbar werden. Es ist also in Aufgabe (15) einmal

$h = -18^0$ und das andremal $= 0^0$ zu setzen, und die beiden Stundenwinkel s und s′ zu berechnen, welche für die Stellungen der Sonne 18^0 unter dem Horizont und im Horizont gelten. Alsdann ist einfach $s - s'$ die Länge der Dämmerung.

Um den Unterschied $s - s'$ durch eine Formel zu finden, setzen wir die Gleichung der Aufgabe (15) für jedes der beiden entsprechenden Dreiecke PSZ an; nämlich:

für $h = 0$; $\quad 0 = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos s$,

und für $h = -18^0$; $-\sin 18^0 = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos s'$.

Addirt man beide Gleichungen und subtrahirt sie, um die beiden Winkel s und s′ in einer Formel zu haben, so entsteht:

$$-\sin 18^0 = 2 \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi\ (\cos s + \cos s')$$

$$\sin 18^0 = \cos d \cos \varphi\ (\cos s - \cos s').$$

Führen wir nun nach Formel (26) und (27) des §. 37 die Werthe für $\cos s + \cos s'$ und für $\cos s - \cos s'$ ein und setzen $\frac{1}{2}(s' - s) = \frac{1}{2}x$, so erhalten wir:

$$2 \cos \tfrac{1}{2}(s + s') \cos \tfrac{1}{2} x \cos d \cos \varphi = -\sin 18^0 - 2 \sin d \sin \varphi$$

und:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(s + s') \sin \tfrac{1}{2} x \cos d \cos \varphi = -\sin 18^0.$$

Um nun den Winkel $\frac{1}{2}(s + s')$, der uns nicht weiter interessirt, zu eliminiren, lösen wir die eine Gleichung in Bezug auf $\cos \frac{1}{2}(s + s')$ und die andere in Bezug auf $\sin \frac{1}{2}(s + s')$ auf, quadriren beide und addiren sie; hierdurch entsteht:

$$1 = \left(\frac{\sin 18^0 + 2 \sin d \sin \varphi}{2 \cos d \cos \varphi \cos \frac{1}{2}x}\right)^2 + \left(\frac{\sin 18^0}{2 \cos d \cos \varphi \sin \frac{1}{2}x}\right)^2$$

oder:

$$4 \cos^2 d \cos^2 \varphi \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cos^2 \tfrac{1}{2} x$$
$$= \sin^2 18^0 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2}x\ (\sin 18^0 \sin d \sin \varphi + \sin^2 d \sin^2 \varphi).$$

Nun ist aber:

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cos^2 \tfrac{1}{2} x = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

und:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x = 1 - \cos x;$$

durch diese Werthe wird unsere Gleichung:

$$\cos^2 d \cos^2 \varphi\ (1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos x) \sin d \sin \varphi\ (\sin 18^0 + \sin d \sin \varphi) - \sin^2 18^0 = 0,$$

oder in Bezug auf die Unbekannte cos x geordnet:

$$\cos^2 d \cos^2 \varphi \cos^2 x - 2 \sin d \sin \varphi\ (\sin 18^0 + \sin d \sin \varphi) \cos x$$
$$- \cos^2 d \cos^2 \varphi + 2 \sin d \sin \varphi\ (\sin 18^0 + \sin d \sin \varphi)$$
$$+ \sin^2 18^0 = 0.$$

Bezeichnet man nun $\cos^2 d \cos^2 \varphi$ mit A,

und: $\sin d \sin \varphi\ (\sin 18^0 + \sin d \sin \varphi)$ mit B,

so ist das Glied der Gleichung, welches die Unbekannte nicht enthält, nämlich:

$$- \cos^2 d \cos^2 \varphi + 2 \sin d \sin \varphi (\sin 18^0 + \sin d \sin \varphi) + \sin^2 18^0 = - A + 2 B + \sin^2 18^0,$$

so also, daß die Gleichung in der Form:

$$A \cos^2 x - 2 B \cos x - A + 2 B + \sin^2 18^0 = 0$$

angeschrieben werden kann.

Die Auflösung ergiebt:

$$\cos x = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - A(- A + 2 B + \sin^2 18^0)}}{A}$$

oder:

$$\cos x = \frac{B \pm \sqrt{(A - B)^2 - A \sin^2 18^0}}{A}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist noch weiter reducirbar, denn setzt man im letzten Glied desselben:

$$A \sin^2 18^0$$

für A den Werth, so entsteht:

$$(A - B)^2 - \cos^2 d \cos^2 \varphi \sin^2 18^0,$$

eine Differenz der Quadrate, die in:

$$(A - B + \cos d \cos \varphi \sin 18^0)(A - B - \cos d \cos \varphi \sin 18^0)$$

zerfällt; der erste dieser Faktoren ist gleich:

$$\cos^2 d \cos^2 \varphi - \sin^2 d \sin^2 \varphi + (\cos d \cos \varphi - \sin d \sin \varphi) . \sin 18^0$$

oder:

$$(\cos d \cos \varphi - \sin d \sin \varphi)(\cos d \cos \varphi + \sin d \sin \varphi + \sin 18^0)$$

oder endlich:

$$\cos (d + \varphi) [\cos (d - \varphi) + \sin 18^0]$$

und der andere Faktor analog gleich:

$$\cos^2 d \cos^2 \varphi - \sin^2 d \sin^2 \varphi - (\cos d \cos \varphi + \sin d \sin \varphi) \sin 18^0$$

oder:

$$\cos (d - \varphi) [\cos (d + \varphi) - \sin 18^0].$$

Hierdurch wird nun die Wurzelgröße zu:

$$\cos (d + \varphi) \cos (d - \varphi) [\cos (d - \varphi) + \sin 18^0] [\cos (d + \varphi) - \sin 18^0]$$

Setzt man statt sin 18° seinen Werth — cos 108°, so kann man die beiden Werthe $\cos (d - \varphi) - \cos 108^0$ und $\cos (d + \varphi) + \cos 108^0$ noch verwandeln, nämlich den einen in:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} (d - \varphi + 108^0) \sin \tfrac{1}{2} (108^0 - d + \varphi)$$

und den andern in:

$$2 \cos \tfrac{1}{2} (d + \varphi + 108^0) \cos \tfrac{1}{2} (d + \varphi - 108^0);$$

hierdurch endlich wird die Größe unter dem Wurzelzeichen in der obigen Lösung:

$$4 \cos (d - \varphi) \cos (d + \varphi) \cos \tfrac{1}{2} (d + \varphi + 108^0) \cos \tfrac{1}{2} (d + \varphi - 108^0) \sin \tfrac{1}{2} (d - \varphi + 108^0) \sin \tfrac{1}{2} (108^0 - d + \varphi).$$

Sechstes Capitel.

Die Grundformeln der Polygonometrie.

§. 51. **Die Zerlegung der Polygone in rechtwinklige Dreiecke.** Wir verfahren, um uns auf die Formeln des §. 41. stützen zu können, hier ganz dem §. 42 analog und zerlegen hier die Polygone, wie dort die schiefwinkligen Dreiecke, in verschiedene rechtwinklige Dreiecke. Fällen wir z. B. von dem höchsten Punkt D des Siebenecks, Figur (49) eine Senkrechte auf die Seite AG, so kann diese Höhe, ähnlich wie die des schiefwinkligen Dreiecks, auf zwei Weisen ausgedrückt werden, wenn man nur noch die Parallelen zu AG, nämlich EH, FK, CI und BL und die zu DM nämlich AP, CQ, EN und GO zieht.

Es ist alsdann DM einmal gleich:

$$DH + HK + KM$$

und dann gleich:

$$DI + IL + LM$$

oder:

$$DH + EN + GO = DI + CQ + AP, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathfrak{A})$$

wenn man für HK, KM... ihre Werthe setzt.

Ebenso ist, analog dem Gang, den wir §. 42 zur Ermittlung der Cosinusformel einhielten, hier:

$$AG = BQ + CI + HE + FN - FO - BP. \quad . \; . \; . \quad (\mathfrak{B}).$$

Wir sind also, wenn wir nur in jedem der rechtwinkligen Dreiecke APB, BCQ, CDI, ꝛc. einen Winkel durch die Polygonswinkel ausgedrückt haben, im Stande zwei Grundformeln mit Hülfe der obigen beiden Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons anzuschreiben.

§. 52. **Die reduzirten Winkel.** Es ist also nun zuerst die Aufgabe die in den rechtwinkligen Dreiecken ABP, BCQ, ꝛc. vorkommenden Winkel der Figur (49) durch die Polygonswinkel auszudrücken. Es sind

so, wenn mit A, B, C, ... die betreffenden Polygonswinkel bezeichnet sind, die Winkel:

$$\alpha = A - 90^0;$$
$$\alpha_1 = B - PBA = B - 90^0 + \alpha.$$
$$\alpha_2 = C - 90^0 - BCQ = C - 90^0 - 90^0 + \alpha_1$$
$$\alpha_3 = D - IDC = D - 90^0 + \alpha_2$$
$$\alpha_4 = E - 90^0 - DEH = E - 90^0 - 90^0 + \alpha_3$$

und endlich:

$$\alpha_5 = F - EFN = F - 90^0 + \alpha_4.$$

Substituirt man nun hier für alle die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .. ihre Werthe, daß alle durch die Polygonswinkel ausgedrückt sind, so entsteht:

$$\alpha = A - 90^0;$$
$$\alpha_1 = A + B - 2.90^0;$$
$$\alpha_2 = A + B + C - 4.90^0;$$
$$\alpha_3 = A + B + C + D - 5.90^0;$$
$$\alpha_4 = A + B + C + D + E - 7.90^0;$$
$$\alpha_5 = A + B + C + D + E + F - 8.90^0.$$

Der vordere Theil der rechten Seite dieser Ausdrücke ist einfach übersichtlich, indem zur Berechnung jedes in irgend welchem rechtwinkligen Dreieck vorkommenden Winkels die Summe aller Polygonswinkel von der ersten bis zu der in Frage stehenden Ecke genommen wird; desto unregelmäßiger aber ist das letzte Glied, in welchem bald eine grade, bald eine ungrade Anzahl von rechten Winkeln von jener Summe abgezogen werden soll. Wenn wir nun auch mit Hülfe dieser Winkel die fraglichen Formeln bilden können, so ist die allgemeine Gültigkeit derselben, wenn sie auf so irregulärem Wege wie hier entstehen, doch schwer zu übersehen.

Suchen wir zu dem Ende an jeder Ecke des Polygons den im betreffenden rechtwinkligen Dreieck enthaltenen Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ . . . durch einen solchen zu bestimmen, der bei Allen auf dieselbe Weise gebildet ist; ziehen wir nämlich durch jedes Eck eine Parallele zu AG und nehmen wir die Parallele jedesmal als linken Schenkel des zu suchenden Winkels, während die folgende Polygonsseite rechter Schenkel wird (wie dies durch die Bogen in Fig. (50) angezeigt ist), so sind diese Winkel gleichmäßig gebildet und werden auch durch gleichartige Formeln berechnet; und ergeben überdies auf sehr einfache Art die fraglichen Winkel der rechtwinkligen Dreiecke. Man nennt diese Winkel reducirte Winkel.

Wir können die oben erhaltenen Werthe von $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ . . . . zur Ermittlung, dieser Winkel, die wir mit A_1, A_2, A_3 . . . bezeichnen wollen, benutzen und haben so, da der erste A selbst ist:

$$A_1 = A + B - 2.90^0.$$
$$A_2 = A + B + C - 4.90^0.$$
$$A_3 = A + B + C + D - 2.90^0.$$
$$A_4 = A + B + C + D + E - 4.90^0.$$
$$A_5 = A + B + C + D + E + F - 6.90^0.$$

Es ist also:

$$A_1 = A + B - 180^0.$$
$$A_2 = A_1 + C - 180^0.$$
$$A_3 = A_2 + D + 180^0.$$
$$A_4 = A_3 + E - 180^0.$$
$$A_5 = A_4 + F - 180^0.$$

Das Gesetz, wodurch jeder einzelne aus dem vorhergehenden entsteht, ist hier leicht zu übersehen, wenn man die einzige Ausnahme:

$$A_3 = A_2 + D + 180^0 \text{ in}$$
$$A_3 = A_2 + D - 180^0 \; (+ 360^0)$$

verwandelt. Schreibt man blos $A_2 + D - 180$, so ist auch dieser Ausdruck mit dem Gesetz der obigen übereinstimmend; da aber:

$$A_3 = A_2 + D + 180^0 < 360^0 \text{ und}$$
$$A_2 + D < 180^0,$$

der Abzug der 180^0 an $A_2 + D$ also für diesen Fall nie ausführbar ist, so hat man sich zu erinnern, daß allemal der Summe der Winkel, die diesen Abzug von 180^0 nicht gestatten erst 360^0 zuzufügen ist.

Die allgemeine Richtigkeit dieser Formel läßt sich leicht auf folgende Weise darthun:

Ist in Figur (51) A_n ein bekannter reduzirter Winkel und soll daraus der Winkel A_{n+1} abgeleitet werden, wobei der Winkel M bekannt ist, so hat man die Seite AB über B hinaus zu verlängern und hat den so entstehenden Winkel DBE $= A_n$; es ist daher

$$A_n + M = ABC + EBD$$
$$= ABE + EBD + EBC;$$

da aber ABE + EBD immer 180^0 betragen müssen, so ist der Ueberschuß jener Summe $A_n + M$ über 180^0 alsdann immer gleich EBC $= A_{n+1}$, wie groß auch der Winkel M sein möge, selbst wenn die Seite MC die Lagen MC′, MC″, MC‴ . . . annähme. Für Lagen wie MC, Figur (52) ist:

$$A_n + M = EBD + ABC < 180^0;$$

fügt man aber hier 360° hinzu, so ist:

$$A_n + M + 360^0 = EBD + ABC + A_{n+1} + CBE,$$

wo wieder EBD + ABC + CBE der Ueberschuß dieser Summe über A_{n+1} gleich 180° ist.

Es gibt übrigens auch einen Fall, wo das Umgekehrte statt hat, nämlich 360° weggelassen werden; wenn z. B. wie Figur (53) sowohl A_n als auch M überstumpfe Winkel sind, während A_{n+1} ein spitzer. Hier ist alsdann:

$A_n + M =$ dem größeren Winkel EBD + dem größeren Winkel ABC;

es ist aber der größere Winkel ABC + CBA = 360°, während ABD = 180°; also ist der Ueberschuß der Summe über 180° um 360° größer als der Winkel A_{n+1} und es können ohne Weiteres die 360° von selbst ausfallen.

§. 53. **Die beiden Grundformeln der Polygonometrie.** Drückt man nun durch diese bekannten Winkel mit Hülfe der Polygonsseiten a, b, c, d ..., Figur (49) die Stücke AP, BP, BQ, CQ 2c. aus und setzt diese Werthe in die Gleichungen (A) und (B) des §. 51 ein, so erhält man ohne weiteres die verlangten Grundformeln.

Wir wollen jedoch, da wir in nächster Folge sehr häufig die Funktionen verschiedener Summen von Winkeln, wie:

$$(A + B), (A + B + C), (A + B + C + D) \ldots .$$

gebrauchen werden und die ohnehin schon langen Ausdrücke durch die so häufige Wiederholung von Winkelsummen, noch länger und unübersichtlicher würden, eine abgekürzte Schreibart einführen und:

A ⋅⋅ B statt A + B
A ⋅⋅ C „ A + B + C
A ⋅⋅ D „ A + B + C + D
u. s. w.
B ⋅⋅ C statt B + C
B ⋅⋅ D „ B + C + D
2c.

setzen; wo also die Summe aller Winkel von dem ersten aufgeführten bis zum letzten ohne Ueberspringung irgend eines zu nehmen ist.

Es ist so:

$$\left.\begin{array}{llll}
AP = a\cos\alpha = & a\sin A. & & \\
BP = a\sin\alpha = & -a\cos A. & & \\
CQ = b\sin\alpha_1 = & b\sin A_1 & = -b\sin(A \cdot\cdot B). & \\
BQ = b\cos\alpha_1 = & b\cos A_1 & = -b\cos(A \cdot\cdot B). & \\
DI = c\sin\alpha_2 = & c\sin A_2 & = c\sin(A \cdot\cdot C)^{*}). & \\
CI = c\cos\alpha_2 = & c\cos A_2 & = c\cos(A \cdot\cdot C). & \\
DH = d\cos\alpha_3 = & -d\sin A_3 & = d\sin(A \cdot\cdot D). & \\
EH = d\sin\alpha_3 = & d\cos A_3 & = -d\cos(A \cdot\cdot D). & \\
EN = e\cos\alpha_4 = & e\sin A_4 & = -e\sin(A \cdot\cdot E). & \\
FN = e\sin\alpha_4 = & e\cos A_4 & = e\cos(A \cdot\cdot E). & \\
OG = f\sin\alpha_5 = & -f\sin A_5 & = f\sin(A \cdot\cdot F)^{**}). & \\
OF = f\cos\alpha_5 = & -f\cos A_5 & = f\cos(A \cdot\cdot F). &
\end{array}\right\} (\mathfrak{C})$$

Durch Substitution dieser Werthe und Ordnen wird nun Gleichung (𝔄) des §. 51 zu:

$$a\sin A - b\sin(A..B) + c\sin(A..C) - d\sin(A...D)$$
$$+ e\sin(A...E) - f\sin(A...F) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

und die Gleichung (𝔅) zu:

$$a\cos A - b\cos(A..B) + c\cos(A..C) - d\cos(A..D)$$
$$+ e\cos(A..E) - f\cos(A..F) = g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Formel (1), welche der (18) des § 42 analog ist, liefert uns für den Fall, daß alle Stücke bis auf die beiden Seiten f und g, so wie den eingeschlossenen Winkel G bekannt sind, ohne Schwierigkeit diese Seiten (f und g), weil der Winkel G durch die Gleichung der Winkelsumme leicht bekannt wird.

Soll aber Formel (1), in dem Falle, daß die Seite g und die beiden anliegenden Winkel A und F unbekannt sind, den Winkel A ergeben, so muß sie zuerst umgewandelt werden; trennt man nämlich in allen den Winkelsummen A..B, A..C, . . . den Winkel A von der Summe der übrigen und entwickelt die Sinus als Funktion zweitheiliger Winkel nach der Formel für $\sin(\alpha + \beta)$, so entsteht:

$$\sin A[a - b\cos B + c\cos(B..C) - d\cos(B..D) + e\cos(B..E) - f\cos(B..F)] =$$
$$= \cos A[b\sin B - c\sin(B..C) + d\sin(B..D) - e\sin(B..E) + f\sin(B..F)] \,..(3)$$

und daraus:

$$\operatorname{tg} A = \frac{b\sin B - c\sin(B..C) + d\sin(B..D) - e\sin(B..E) + f\sin(B..F)}{a - b\cos B + c\cos(B..C) - d\cos(B..D) + e\cos(B..E) - f\cos(B..F)} \,(4)$$

---

*) Da die Summe der drei Winkel $A + B + C$ größer als 360°, so rechtfertigt sich beim Aufsuchen des Sinus und Cosinus der Wegfall der 360° von selbst.

**) Der Winkel $A + B + C + D + E + F - 6.90^\circ$ ist ebenso wie ein Winkel $A + B + C + D + E + F - 2.90^\circ$ zu betrachten, indem der Zugang oder Abgang von 360° den Winkel nicht ändert.

Nachdem so A bekannt, folgt g aus (2) und G aus der Winkelsumme, oder G zuerst aus der Winkelsumme und dann g aus (1).

Betrachten wir endlich den Fall, wo die drei Winkel F, G und A unbekannt sind, so ist keine der Formeln weder (1) noch (2) noch (4) die Aufgabe zu lösen im Stande; wir müssen deßhalb einen Winkel z. B. A*) aus den beiden Formeln (1) und (2) eliminiren, um dann nur noch den einen unbekannten Winkel nämlich F in dem Resultat zu haben.

Behandeln wir zu dem Ende die Gleichung (2) ebenso wie oben (1) behandelt wurde, d. h. scheiden wir in ihr von allen Winkelsummen den Winkel A ab, so entsteht:

$$\cos A\,[a - b\cos B + c\cos(B..C) - d\cos(B..D) + e\cos(B...E) - f\cos(B...F)]$$
$$+ \sin A\,[b\sin B - c\sin(B..C) + d\sin(B..D) - e\sin(B..E) + f\sin(B...F)] = g \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(5).$$

Vergleicht man nun diesen Ausdruck mit (3), so ersieht man leicht, daß der dortige Coefficient von cos A hier der von sin A und der dortige Coefficient von sin A hier der von cos A ist; setzen wir nun den ersteren gleich M und den letzteren gleich N, so wird (3) zu:

$$M\cos A - N\sin A = 0$$

und (5) zu:

$$N\cos A + M\sin A = g.$$

Quadrirt man beide Ausdrücke und addirt sie, so entsteht:

$$M^2 + N^2 = g^2.$$

Um den Werth $M^2 + N^2$ auszuführen, setzen wir die beiden Werthe M und N hier unter einander, haben also:

$$M = b\sin B - c\sin(B..C) + d\sin(B..D) - e\sin(B..E) + f\sin(B..F)$$

und

$$N = a - b\cos B + c\cos(B..C) - d\cos(B..D) + e\cos(B..E) - f\cos(B..F).$$

Da nun:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1,\ \sin^2(B..C) + \cos^2(B..C) = 1 \text{ etc.},$$

ist, so entsteht durch Ausführen der Quadrate, Addiren und Ordnen:

$$g^2 = M^2 + N^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$$

---

*) Es ist leicht zu übersehen, daß die Elimination des nur einmal in jeder Formel vorkommenden Winkels F am leichtesten von statten geht, aber die entstehenden Formeln sind dann, weil die Seite f als bevorzugte in diesem Resultat erscheint, bisher aber g als solche erschien, bei weitem nicht so übersichtlich zu machen, als die, welche entstehen, wenn man A eliminirt.

$$- 2a\,\{b\cos B - c\cos(B..C) + d\cos(B..D) - e\cos(B..E) + f\cos(B..F)\}$$

$$- 2b\,\{c\,[\cos B\cos(B..C) + \sin B\sin(B..C)] - d\,[\cos B\cos(B..D) + \sin B\sin(B..D)] + e\,[\cos B\cos(B..E) + \sin B\sin(B..E)] - f\,[\cos B\cos(B..F) + \sin B\sin(B..F)]\}$$

$$- 2c\,\{d\,[\cos(B..C)\cos(B..D) + \sin(B..C)\sin(B..D)] - e\,[\cos(B..C)\cos(B..E) + \sin(B..C)\sin(B..E)] + f\,[\cos(B..C)\cos(B..F) + \sin(B..C)\sin(B..F)]\}$$

$$- 2d\,\{e\,[\cos(B..D)\cos(B..E) + \sin(B..D)\sin(B..E)] - f\,[\cos(B..D)\cos(B..F) + \sin(B..D)\sin(B..F)]\}$$

$$- 2ef\,[\cos(B..E)\cos(B..F) + \sin(B..E)\sin(B..F)].$$

Die Werthe der [] = Klammern dieses Ausdrucks sind nun alle nach der Form:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

gebildet, also alle gleich $\cos(\alpha - \beta)$ oder auch $\cos(\beta - \alpha)$; sie sind mithin der Reihe nach gleich:

$$\begin{array}{llll} \cos C, & \cos(C..D), & \cos(C..E), & \cos(C..F) \\ & \cos D, & \cos(D..E), & \cos(D..F) \\ & & \cos E, & \cos(E..F) \text{ und} \\ & & & \cos F. \end{array}$$

Der ganze Ausdruck wird mithin:

$$g^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$$

$$\begin{aligned} &- 2a\,[b\cos B - c\cos(B..C) + d\cos(B..D) - e\cos(B..E) + f\cos(B..F)] \\ &\qquad - 2b\,[c\cos C - d\cos(C..D) + e\cos(C..E) - f\cos(C..F)] \\ &\qquad\qquad - 2c\,[d\cos D - e\cos(D..E) + f\cos(D..F)] \\ &\qquad\qquad\qquad - 2d\,[e\cos E - f\cos(E..F)] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - 2ef\cos F \ldots (6). \end{aligned}$$

Eine Formel, von der sogleich ersichtlich, daß sie der (19) des § 42 analog gebildet ist. Dieselbe liefert in dem oben beregten Fall den Winkel F wenn sie in Bezug auf diesen aufgelöst wird; sie ist aber auch im Stande, wenn alles bis auf g und die beiden Winkel A und G bekannt, das g direct zu ergeben, wie (4) das A in diesem Falle direct gab.

Zieht man die Werthe der reducirten Winkel des §. 52 in Betracht, so ersieht man leicht, daß $B + C - 180^0$ der Winkel ist, den eine durch den Punkt C zu AB (a) parallel gezogene Grade mit CD (c) macht, analog ist $B + C + D - 2.180^0$ der Winkel, den eine durch den Punkt D zu AB (a) gezogene Parallele mit ED (d) bildet, 2c. Man

kann also diese Winkel $B+C-180^0$, $B+C+D-2.180$, $B+C+D+E-3.180^0$ ꝛc., weil es diejenigen sind, welche die verlängerte Seite a resp. mit den verlängerten Seiten c, d, e .... macht, mit (ac), (ad) (ae).... bezeichnen. Ebenso leicht ist es verständlich, wenn wir $(C+D-180^0)$, $(C+D+E-2.180^0)$.... durch (bd), (be).... ausdrücken. Da nun aber:

$$\cos(B+C) = -\cos(ac)$$
$$\cos(B+C+D) = \cos(ad)$$
$$\cos(B+C+D+E) = -\cos(ae)$$

und:

$$\cos(C+D) = -\cos(bd)$$
$$\cos(C+D+E) = \cos(be)$$
etc.

ist, so läßt sich die Formel (6) als:

$$g^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$$
$$-2[ab\cos(ab) + ac\cos(ac) + ad\cos(ad) + ae\cos(ae) + af\cos(af)]$$
$$-2[bc\cos(bc) + bd\cos(bd) + be\cos(be) + bf\cos(bf)]$$
$$-2[cd\cos(cd) + ce\cos(ce) + cf\cos(cf)]$$
$$-2[de\cos(de) + df\cos(df)]$$
$$-2\,ef\cos(ef)\;(7)^*$$

anschreiben.

§. 54. **Die Flächeninhaltsformeln.** Man kann nun in ähnlicher Weise fortfahrend regelmäßig gestaltete, leicht übersichtliche Formeln auch für die Fläche des Polygons aufstellen, wenn man dieselbe, wie Figur (54) durch die Senkrechten BR, CS, DT, EU, FV in eine Reihe von Paralleltrapezen und rechtwinkligen Dreiecken zerlegt, da diese in gehöriger Art zusammenaddirt oder abgezogen den Flächeninhalt liefern.

Man wird nämlich leicht übersehen, daß der Flächeninhalt des Polygons gleich der

	Fläche	BCSR
+	„	CDTS
+	„	DEUT
+	„	EFVU
—	„	ABR
—	„	FGV.

*) Natürlich lassen sich in derselben abgekürzten Schreibweise die Formeln (1) bis (5) ebenfalls anschreiben.

Bezeichnet man Fig. (54) die senkrechten Abstände der Punkte B, C, D . . . F von der Grundlinie AG (und deren Verlängerungen) resp. mit $y_1, y_2, y_3 \ldots$, so daß:

$$BR = y_1$$
$$CS = y_2$$
$$DT = y_3$$
$$EU = y_4 \text{ und}$$
$$FV = y_5;$$

und bezeichnet man ebenso die Abstände der Punkte S, R, T, U, V von dem ersten Punkt A resp. mit $x_1, x_2, x_3 \ldots$ so daß:

$$AR = x_1$$
$$AS = x_2$$

aber: $AT = -x_3$ (weil es von dem Ausgangspunkt A der verschiedenen x links liegt), ebenso:

$$AU = -x_4$$
$$AV = -x_5 \text{ und}$$
$$AG = -x_6;$$

so kann man hiermit die ganze Fläche des Polygons ausdrücken.

Denn es ist:

die Fläche $BCSR = \frac{1}{2}(y_1+y_2)\,SR = \frac{1}{2}(y_1+y_2)(AR-AS)$

oder „ „ $BCSR = \frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)$

ebenso ist „ „ $CDTS = \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_2-x_3)$ (weil $AT = -x_3$)

„ „ $DEUT = \frac{1}{2}(y_3+y_4)(x_3-x_4)$

„ „ $EFVU = \frac{1}{2}(y_4+y_5)(x_4-x_5)$

„ „ $ABR = \frac{1}{2}\,y_1\,x_1$ und

„ „ $FGV = \frac{1}{2}\,y_5\,(x_6-x_5)$;

es wird also durch Substitution dieser Werthe in den obigen Ausdruck die Fläche des Polygons gleich:

$$\tfrac{1}{2}\,[(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+(y_3+y_4)(x_3-x_4) + (y_4+y_5)(x_4-x_5) - y_1\,x_1 - y_5\,(x_6-x_5)].$$

Durch Reduction und Umordnen geht hieraus hervor:

$$\text{Fläche des Polygons} = \tfrac{1}{2}\,[x_1\,y_2 + x_2\,(y_3-y_1) + x_3\,(y_4-y_2) + x_4(y_5-y_3) - x_5\,y_4 - x_6\,y_5].$$

Es ist nun nicht schwierig aus dem System (C) der primitiven Ausdrücke des §. 53 die Werthe von x_1, x_2, x_3,.... sowie von y_1 y_2, y_3, ... mit Hülfe der Figuren (49) und (54) zu entwickeln; es ist nämlich:

$x_1 = AR$ (Fig.54) $= BP$ (Fig. 49) $= -\, a \cos A.$

$x_2 = AS$ „ $= PQ = x_1 - BQ$ „ $= -\, a \cos A + b \cos(A..B).$

$-x_3 = AT$ „ $= AM = CI - x_2$ „ $= a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C).$

$-x_4 = AU$ „ $= HE - x_3$ „ $= a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C) - d \cos(A..D)$

$-x_5 = AV$ „ $= NF - x_4$ „ $= a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C) - d \cos(A..D) + e \cos(A..E)$

$-x_6 = g$ „ „ $= a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C) - d \cos(A.D) + e \cos(A.E) - f \cos(AF)$

und weiter:

$y_2 = CS$ (Fig. 54) $= AP + CQ$ (Fig. 49.) $= a \sin A - b \sin(A..B)$

$y_3 - y_1 = DT - BR$ „ $= DI + CQ$ „ $= -b \sin(A..B) + c \sin(A..C)$

$y_4 - y_2 = EU - CS$ „ $= DI - DH$ „ $= c \sin(A..C) - d \sin(A..D)$

$y_5 - y_3 = FV - DT$ „ $= -\, EN - DH$ „ $= -d \sin(A..D) + e \sin(A..E)$

$y_4 = EU$ „ $= EN + OG$ „ $= -e \sin(A..E) + f \sin(A..F)$

$y_5 = FV$ „ $= OG$ „ $= f \sin(A..F).$

Substituiren wir diese Werthe in den obigen Ausdruck, so entsteht:

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2} \{ -\, a \cos A\, [a \sin A - b \sin(A..B)]$$
$$-\, [a \cos A - b \cos(A..B)]\, [-b \sin(A..B) + c \sin(A..C)]$$
$$-\, [a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C)]\, [c \sin(A..C) - d \sin(A..D)]$$
$$-\, [a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C) - d \cos(A..D)]\, [-d \sin(A..D) + e \sin(A..E)]$$
$$-\, [a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C) - d \cos(A..D) + e \cos(A..E)]\, [e \sin(A..E) - f \sin(A..F)]$$
$$-\, [a \cos A - b \cos(A..B) + c \cos(A..C) - d \cos(A..D) + e \cos(A..E) - f \cos(A..F)]\, [-f \sin(A..F)] \}.$$

oder wenn man umordnet:

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2} \{ a \cos A [- a \sin A + 2 b \sin (A..B) - 2 c \sin (A..C) + 2 d \sin (A..D) - 2 e \sin (A..E) + 2 f \sin (A..F)]$$
$$- b \cos (A..B) [b \sin (A..B) - 2 c \sin (A..C) + 2 d \sin (A..D) - 2 e \sin (A..E) + 2 f \sin (A..F)]$$
$$+ c \cos (A..C) [- c \sin (A..C) + 2 d \sin (A..D) - 2 e \sin (A..E) + 2 f \sin (A..F)]$$
$$- d \cos (A..D) [d \sin (A..D) - 2 e \sin (A..E) + 2 f \sin (A..F)]$$
$$+ e \cos (A..E) [- e \sin (A..E) + 2 f \sin (A..F)]$$
$$- f \cos (A..F) . \ f \sin (A..F)] .$$

Man kann diesen Ausdruck, der für die Rechnung nicht unbequem ist, noch etwas weiter verwandeln, wenn man zu jeder von den sechs in den []-Klammern befindlichen Größen, (das Glied f sin (A..F) auch als eine solche betrachtet) den Ausdruck (1) des §. 53 zuzählt.

Es entsteht so:

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2} \{ a \cos A [b \sin (A..B) - c \sin (A..C) + d \sin (A..D) - e \sin (A..E) + f \sin (A..F)]$$
$$- b \cos (A..B) [a \sin A - c \sin (A..C) + d \sin (A..D) - e \sin (A..E) + f \sin (A..F)]$$
$$+ c \cos (A..C) [a \sin A - b \sin (A..B) + d \sin (A..D) - e \sin (A..E) + f \sin (A..F)]$$
$$- d \cos (A..D) [a \sin A - b \sin (A..B) + c \sin (A..C) - e \sin (A..E) + f \sin (A..F)]$$
$$+ e \cos (A..E) [a \sin A - b \sin (A..B) + c \sin (A..C) - d \sin (A..D) + f \sin (A..F)]$$
$$- f \cos (A..F) [a \sin A - b \sin (A..B) + c \sin (A..C) - d \sin (A..D) + e \sin (A..E)] \} .$$

Führt man hier die Multiplicationen aus und ordnet dann, so wird:

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2} (ab[\sin(A..B)\cos A - \cos(A+B)\sin A] - ac[\sin(A..C)\cos A - \cos(A..C)\sin A]$$
$$+ ad[\sin(A..D)\cos A - \cos(A..D)\sin A] - ae[\sin(A..E)\cos A - \cos(A..E)\sin A]$$
$$+ af[\sin(A..F)\cos A - \cos(A..F)\sin A] + bc[\sin(A..C)\cos(A..B) - \cos(A..C)\sin(A..B)]$$
$$- bd[\sin(A..D(\cos(A..B) - \cos(A..D)\sin(A..B)] + be[\sin A..E)\cos(A..B) - \cos(A..E)\sin(A..B)]$$

$$-bf[\sin(A..F)\cos(A..B)-\cos(A..F)\sin(A..B)]+cd[\sin(A..D)\cos(A..C)-\cos(A..D)\sin(A..C)]$$
$$-ce[\sin(A..E)\cos(A..C)-\cos(A..E)\sin(A..C)]+cf[\sin(A..F)\cos(A..C)-\cos(A..F)\sin(A..C)]$$
$$+de[\sin(A..E)\cos(A..D)-\cos(A..E)\sin(A..D)]-df[\sin(A..F)\cos(A..D)-\cos(A..F)\sin(A..D)]$$
$$+ef[\sin(A..F)\cos(A..E)-\cos(A..F)\sin(A..E)]).$$

Da hier aber jede der in den []=Klammern befindlichen Größen die Form $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ hat, also ein Werth von der Form $\sin(\alpha-\beta)$ ist, so wird endlich:

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2}\,(a\,[b\sin B - c\sin(B..C) + d\sin(B..D) - e\sin(B..E) + f\sin(B..F)]$$
$$+\ b\,[c\sin C - d\sin(C..D) + e\sin(C..E) - f\sin(C..F)]$$
$$+\ c\,[d\sin D - e\sin(D..E) + f\sin(D..F)]$$
$$+\ d\,[e\sin E - f\sin(E..F)]$$
$$+\ ef\sin F).$$

Obgleich aus allen diesen Formeln, nachdem für $x_1, x_2, x_3 \ldots$ und für $y_1, y_2, y_3 \ldots$ ihre Werthe gesetzt worden waren, die regelmäßige Gestaltung und somit auch wohl ihre Unabhängigkeit von der besonderen, zu Grunde gelegten, Figur hervorgeht, also ihre allgemeine Gültigkeit einleuchtet, so wollen wir doch auch die Allgemeinheit und regelmäßige Gestalt der Formel des obigen Flächengehalts, bei welcher die x und y noch vorkommen, hier nachträglich darthun. Wir ziehen zu dem Ende zuerst bei Figur (55) in unsrem vorgelegten Polygon eine Parallele VR zur Seite AG, beziehen alle die Senkrechten nun auf diese, statt auf AG selbst, (damit die Senkrechten der beiden Punkte A und G nicht ausfallen) und benennen nun diese Senkrechten BR, CS, . . . FV ebenso wie die früheren mit $y_1, y_2, y_3 \ldots y_5$ und GW mit y_6 sowie AZ mit y_0. Weiter machen wir unsere $x_1, x_2 \ldots$ ebenfalls unabhängig von dem speziellen Punkt A und zählen sie von X aus, so daß $XR = x_1$, $XS = x_2$, $XT = x_3$, $XU = x_4$, $XV = x_5$, $XW = x_6$ und $XZ = x_0$, wobei x_3, x_4, x_5 und x_6 negative Größen bedeuten. Wir können nun hier ebenso wie früher die Flächen der sämmtlichen Trapeze, Fig. (55), durch Werthe von $x_1, x_2, x_3 \ldots$ und $y_1, y_2, y_3 \ldots$ und end=

lich aus diesen die Polygonfläche selbst ausdrücken. Es ist so:

die Fläche des Polygons = Fl. BCSR + Fl. CDTS + Fl. DEUT + Fl. EFVU — Fl. GFVW — Fl. AGWZ — Fl. BAZR.

oder:

$$\text{Polyg.-Fläche} = \tfrac{1}{2}\,[(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) + (y_4 + y_5)(x_4 - x_5) - (y_5 + y_6)(x_6 - x_5) - (y_6 + y_0)(x_0 - x_6) - (y_0 + y_1)(x_1 - x_0)],$$

indem hier bei den Differenzen zweier negativen x das größere vorausgehen muß, damit dieselbe positiv werde.

Uebersieht man hier nicht, daß bei allen positiven Gliedern in der Differenz das x, welches den kleineren Index hat, vorausteht und bei allen negativen Gliedern aber das Entgegengesetzte statt hat, so kann man auch diese letzteren auf dieselbe Form wie die ersteren bringen, wenn man ihnen nur das Vorzeichen + gibt. Ordnet man dann, so ist der Ausdruck der

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2}\,[(y_0 + y_1)(x_0 - x_1) + (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) + (y_4 + y_5)(x_4 - x_5) + (y_5 + y_6)(x_5 - x_6) + (y_6 + y_0)(x_6 - x_0)],$$

vollständig regelmäßig, indem alle Flächeninhaltstheile ihre richtigen Zeichen dadurch erhalten, daß man die Differenz der x in einerlei Ordnung nimmt, nämlich das x mit höherem Index als Subtrahend auftreten läßt.

Leicht ist nach Fig. (56) zu übersehen, wie auch bei unregelmäßigen Gestaltungen diese Regel Bestand behält; denn nach dieser Regel sind wie sich gehört die Paralleltrapeze CDKI und EFML positiv, während die ABHG, BCIH, DELK negativ sind. Wenn man nemlich die Trapeze BCIH und DELK, an den anderen abzieht, hat man das Dreieck CDP mit weggenommen und die Fläche CPKI doppelt abgezogen, so daß man also die Fläche CDKI im Ganzen zu viel abgezogen hat; es muß mithin dieselbe wieder zugefügt werden.

Nennt man die zu den Punkten A, B, C, D, E, F gehörigen von N anfangenden x resp. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, so sind die Differenzen $(x_5 - x_6)$ und $(x_3 - x_4)$, wie sie die obige Formel ergibt, positiv, während die Differenzen $(x_1 - x_2)$, $(x_2 - x_3)$ und $(x_4 - x_5)$ derselben Formel, wie sich gehört, hier negativ sind. Aehnlich in allen verwandten Fällen.

In der obigen Formel gehen bei der Reduktion, wie leicht zu übersehen, alle Glieder mit zwei gleichen Indices weg und es bleibt:

$$\text{Fl.} = \tfrac{1}{2}\,[x_0 y_1 - y_0 x_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \ldots + x_6 y_0 - y_6 x_0]$$

zurück. Man kann nun diese nach den x oder den y ordnen und hat dann entweder:

$$Fl. = \frac{1}{2} [x_0 (y_1 - y_6) + x_1 (y_2 - y_0) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_4 - y_2) + x_4 (y_5 - y_3) + x_5 (y_6 - y_4) + x_6 (y_0 - y_5)].$$

oder:

$$Fl. = \frac{1}{2} [y_0 (x_6 - x_1) + y_1 (x_0 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_4) + y_4 (x_3 - x_5) + y_5 (x_4 - x_6) + y_6 (x_5 - x_0)].$$

Die Regelmäßigkeit beider Ausdrücke ist leicht übersichtlich und beide sich sehr ähnlich; nur sind bei den x-Differenzen die niederen und bei den y-Differenzen die höheren Indices voraus.

Siebentes Capitel.

Die Ausführung der Zahlenrechnungen.

§. 55. **Die trigonometrischen und logarithmisch-trigonometrischen Tafeln.** Es ist in §. 39 angedeutet worden, auf welche Art die Werthe für die trigonometrischen Funktionen der verschiedenen spitzen Winkel berechnet werden können, um so trigonometrische Tafeln, wie sie bei der Rechnung zu gebrauchen sind, zu construiren. Man gibt jedoch gewöhnlich diesen Tafeln noch eine Verbesserung zu, indem man, weil gewöhnlich die Ausführung der Zahlenrechnungen mit Hülfe der Logarithmen vorgenommen wird, die Logarithmen der berechneten Werthe der trigonometrischen Funktionen in ihnen zusammenstellt. *)

---

*) Es mag hier nur erwähnt sein, daß die meisten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, da die Werthe der Sinus und Cosinus sämmtlich kleiner als 1 sind, also negative Logarithmen oder positive Mantissen und negative Kennziffern haben würden, um diese negativen Kennziffern zu vermeiden, den Logarithmen die Zahl 10 sämmtlich zuaddirt haben, so daß nun die positiven Kennziffern 8,... 9,... statt —2 und —1 in ihnen erscheinen. Aehnlich ist es bei den Logarithmen der Tangenten und Cotangenten, sobald sie solche negative Kennziffern erhalten müßten. Es ist also allen diesen Werthen die Kennziffer —10 bei der Rechnung hinten anzufügen oder angefügt zu denken.

Es ist aber, um die Ausrechnung der erhaltenen Resultate mit Hülfe der Logarithmen möglichst bequem zu haben, sehr oft nöthig dieselben vorher noch umzugestalten, indem manche Ausdrücke, z. B. solche die aus einer Reihe von Gliedern bestehen, durchaus nicht für die logarithmische Berechnung bequem sind, weil man nach der logarithmischen Berechnung jedes Gliedes von dem Logarithmus zum Zahlenwerth desselben übergehen müßte, um die Rechnung fortsetzen zu können. Wollte man z. B. den Werth der Summe:

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

ausrechnen, so müßte man zuerst die Werthe von log sin A, log sin B und log sin C in der gebräuchlichen logarithmisch-trigonometrischen Tafel aufsuchen, zu allen drei Logarithmen dann in der gewöhnlichen Logarithmentafel die Zahlenwerthe und hätte diese endlich zu addiren; hätte also sechs Aufschlagungen, während, wenn man den in §. 40 (3) gefundenen Werth für $\sin A + \sin B + \sin C$, nämlich:

$$4 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C$$

nimmt, nur den Werth: $\log 4 + \log \cos \frac{1}{2} A + \log \cos \frac{1}{2} B + \log \cos \frac{1}{2} C$ zu berechnen und dann die Zahl dazu zu suchen hätte. Also nur vier Aufschlagungen, wenn man annimmt, daß der Rechnende den Logarithmus von 4, der ja oft in Rechnungen sich wiederholt, auswendig kennt.

Besitzt man freilich außer den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln auch solche, welche die wirklichen Werthe der trigonometrischen Funktionen enthalten, so ist die Berechnung des ersteren Ausdrucks doch einfacher, da sie alsdann nur in drei Aufschlagungen der Tafel und einer Summirung besteht.

Ebenfalls nicht ohne Vortheil in diesen und ähnlichen Fällen ist der Gebrauch der ursprünglich von Gauß mit 5 Dezimalen, dann von Zech mit 7 Dezimalen und von Müller mit 4 Dezimalen berechneten Summe- und Differenz-Logarithmen, mit deren Hülfe man aus den Werthen log a und log b, die Werthe von $\log(a+b)$ und $\log(a-b)$ mit geringer Mühe berechnen kann. Es werden diese Tafeln in neuerer Zeit fast allen erscheinenden Logarithmentafeln beigegeben. —

§. 56. **Die Umwandlung der Resultate zur bequemeren Ausführung der Rechnung mit Logarithmen.** Wie wir im vorigen Paragraphen angedeutet, sind Formeln, die aus verschiedenen Gliedern bestehen, für die logarithmische Rechnung sehr unbequem, weil man nach der logarithmischen Berechnung jedes Gliedes zu den Zahlen zurückkehren und nach der Ausführung der Zahlenrechnungen sehr oft wieder zu den Logarithmen übergehen muß, um die Rechnung selbst

weiter fortsetzen zu können. Man kann diesem Uebelstand oft durch weitere entsprechende Verwandlung der Formeln, welche sich aus der Natur der Sache ergeben, abhelfen; aber viel öfter sind dies gewisse Kunstgriffe, deren Anwendung wir hier genauer zeigen wollen, im Stande.

I. So kann z. B. die Zahlenausrechnung der Lösung der Aufgabe 6., §. 45,

$$\cos \tfrac{1}{2}(A-C) = \frac{2h}{p} \cos \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} B$$

bedeutend vereinfacht werden. Um nämlich nach dieser Formel selbst den Werth $\cos \frac{1}{2}(A-C)$ auszurechnen, hätte man log h, log p, log $\sin \frac{1}{2}$ B und log $\cos \frac{1}{2}$ B aufzusuchen, durch Summation der betreffenden Logarithmen den Werth von log $\frac{2h}{p} \cos \frac{1}{2} B$ zu berechnen, und dann hierzu sowohl, wie zu log $\sin \frac{1}{2}$ B die Zahlen aufzuschlagen, beide zu addiren, und dann wieder den Logarithmus zur Summe zu finden; dieser gibt dann als Cosinus in der Tafel aufgesucht, den Werth $\frac{1}{2}(A-C)$. Es sind also hier außer den übrigen Rechnungen 8 Uebergänge von Zahlen (resp. Winkeln) zu Logarithmen und umgekehrt von Logarithmen zu Zahlen (resp. Winkeln) nöthig.

Setzt man aber hier ähnlich dem in Aufgabe (14) §. 38 eingeschlagenen Weg (der dort zur Lösung der Aufgabe diente, hier zur Ausführung der Rechnung helfen soll) den Werth:

$$\frac{2h}{p} = \operatorname{tg} \varphi,$$

wo φ irgend ein aus der Tafel zu bestimmender Winkel ist, so wird der obige Ausdruck zu:

$$\begin{aligned}\cos \tfrac{1}{2}(A-C) &= \operatorname{tg} \varphi \cos \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} B \\ &= \frac{\sin \varphi \cos \frac{1}{2} B + \cos \varphi \sin \frac{1}{2} B}{\cos \varphi} \\ &= \frac{\sin (\varphi + \frac{1}{2} B)}{\cos \varphi}.\end{aligned}$$

Um die Rechnung nun auszuführen, hat man die Logarithmen von h und p aufzuschlagen und aus dem daraus leicht berechneten Werth log $\frac{2h}{p}$, der als tg φ aufgesucht wird, den Winkel φ zu bestimmen; bei diesen Aufschlagungen nimmt man sich zugleich den Werth cos φ, der neben jenem tg φ steht, aus der Tafel, was ohne weitere Mühe geschieht. Nach Berechnung des Winkels $(\varphi + \frac{1}{2} B)$, sucht man log

$\sin(\varphi + \frac{1}{2}B)$, zieht log $\cos\varphi$ von demselben ab, sucht die erhaltene Differenz unter den Cosinus der Tafel auf und hat so $\frac{1}{2}(A - C)$. Hierbei sind nur fünf verschiedene Aufschlagungen der Tafel nothwendig, also eine bedeutende Ersparniß an Mühe und Zeit.

II. Aehnlich kann man die eine Lösung der Aufgabe (2) des §. 45 behandeln; jedoch Formen wie die der Lösung der Aufgabe (11) des §. 46:

$$\cos(\alpha + \gamma - 2x) = \frac{2b}{a}\sin\beta\sin\gamma + \cos(\alpha+\gamma)$$

erfordern eine etwas andere Behandlung, obgleich sie den obigen Ausdrücken ähnlich sind. Gibt man hier der rechten Seite der Gleichung die Form:

$$\cos(\alpha+\gamma)\left(1 + \frac{2b}{a}\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos(\alpha+\gamma)}\right)$$

und setzt:

$$\frac{2b}{a}\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos(\alpha+\gamma)} = \operatorname{tg}\varphi,$$

so ist:

$$\cos(\alpha + \gamma - 2x) = \cos(\alpha+\gamma)(1 + \operatorname{tg}\varphi);$$

da aber nach Aufgabe (7) des §. 37:

$$1 + \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(45^0 + \varphi)\sqrt{2}}{\cos\varphi}$$

ist, so hat man:

$$\cos(\alpha+\gamma-2x) = \frac{\cos(\alpha+\gamma)\sin(45^0+\varphi)\sqrt{2}}{\cos\varphi},$$

wodurch freilich nur eine geringe Erleichterung in der Ausrechnung eingetreten ist.

III. Ausdrücke, wie die beiden Resultate der Aufgabe (2), §. 45:

$$a + c = \sqrt{b^2 + 2bh\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B} \text{ und}$$

$$a - c = \sqrt{b^2 - 2bh\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B},$$

deren Ausrechnung allerdings ziemlich unbequem sein würde, kann man in anderer Weise umgestalten. Gibt man nämlich irgend einer aus zwei verschiedenen Gliedern bestehenden Wurzelgröße eine der Formen $\sqrt{1 \pm m}$, so kann man für den Fall:

$$\sqrt{1 + m}$$

das m (was eine positive Größe) $= \operatorname{tg}^2\varphi$ setzen und hat:

$$\sqrt{1 + m} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi};$$

ür den Fall:

$$\sqrt{1-m}$$

(wo m ebenfalls an sich positiv) setzt man das $m = \sin^2 \varphi$ und hat:

$$\sqrt{1-m} = \sqrt{1-\sin^2 \varphi} = \cos \varphi.$$

Da im letzteren Falle für $m > 1$ die Wurzel imaginär würde, so kommen blos die Werthe desselben in Betracht, die kleiner als 1; es kann also m immer als der Werth des Sinus irgend eines Winkels angesehen werden.

Bringt man dieses Verfahren auf die obigen beiden Werthe in Anwendung, so ist zuerst:

$$a + c = b \sqrt{1 + \frac{2h}{b} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B}.$$

$$a - c = b \sqrt{1 - \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B},$$

und dann wird:

$$\frac{2h}{b} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B = \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

und:

$$\frac{2h}{b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \sin^2 \psi$$

gesetzt.

Es wird alsdann:

$$a + c = \frac{b}{\cos \varphi}$$

und:

$$a - c = b \cos \psi.$$

Die Ausrechnung von $\log \sqrt{\frac{2h}{b} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B}$ und

von $\log \sqrt{\frac{2h}{b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B}$

erfordert nicht mehr als drei Aufschlagungen in der Tafel; durch Aufsuchen dieser ausgerechneten Werthe resp. als Tangente und Sinus findet man φ und ψ und neben $\operatorname{tg} \varphi$ und $\sin \psi$ die Werthe $\cos \varphi$ und $\cos \psi$; so, daß also hierdurch die Logarithmen der Werthe $\frac{b}{\cos \varphi}$ und $b \cos \psi$ bekannt sind; u. s. f.

Aehnlich läßt sich die Auflösung der Aufgabe (18), §. 46 behandeln; es ist dort:

$$AB = \frac{2h}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma}.$$

Dasselbe geht leicht über in:

$$AB = \frac{2h\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}},$$

wird hier:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta} = \sin\varphi$$

gesetzt, so verwandelt sich der obige Ausdruck in:

$$AB = \frac{2h\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\varphi}{\sin\alpha\sin\beta}$$

oder:

$$= \frac{2h\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\varphi\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}.$$

IV. Im §. 46 werden mehrere der Aufgaben auf die Nr. 16 des §. 38 zurückgeführt; es erscheinen also dann ihre Lösungen unter der Form:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{m+1}{m-1}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Es ist nun in allen den Fällen, wo m als Zahl gegeben sehr leicht die Zahlenwerthe $m+1$ und $m-1$ auszurechnen und dann deren Logarithmen aufzusuchen; in den Fällen aber, wo man den Werth von m durch vorhergehende Rechnung gefunden hat, also vorläufig meist den Werth log m kennt und daraus erst durch Aufschlagen die Zahl m finden müßte, thut man gut einen andern Weg einzuhalten.

Setzt man nämlich $m = \operatorname{tg}\varphi$, wo φ ebenfalls durch eine Aufschlagung bekannt wird, so ist:

$$\frac{m+1}{m-1} = -\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = -\operatorname{tg}(45^0+\varphi) = \operatorname{cotg}(\varphi-45^0)$$

und der Werth $\log\frac{m+1}{m-1}$ wird durch zwei Aufschlagungen, nämlich: φ aus $\log\operatorname{tg}\varphi = \log m$ und $\log\operatorname{tg}(45^0+\varphi)$ aus $45^0+\varphi$ bekannt. Also hat die obige Aufgabe in den Berechnungen von:

$$\operatorname{tg}\varphi = m \text{ und}$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(x-y) = -\operatorname{tg}(45^0+\varphi)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha$$

ihre Lösung gefunden.

Auf diesem Wege sind auch die Resultate der Aufgaben 16 und 17 des §. 46 umzuwandeln; indem man nämlich in:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Zähler und Nenner durch b sin a dividirt, entsteht:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x-y = \frac{1 + \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}{1 - \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Setzt man nun:

$$\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \operatorname{tg} \varphi,$$

so ist:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

und:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg}(45^0+\varphi) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

ähnlich ist die Lösung der Aufgabe (17):

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x-y+\alpha-\beta) = \operatorname{tg}(45^0+\varphi) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(B+\alpha+\beta).$$

In der anderen Lösung derselben Aufgabe (17) hat Professor Grunert den Werth:

$$\frac{\sin A \sin(\alpha - C)}{\sin C \sin(\beta - A)} = \operatorname{tg} \varphi$$

gesetzt und schließlich:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \operatorname{cotg}(45^0+\varphi)$$

erhalten. —

V. Auf eine dem Vorhergehenden ganz analoge Weise lassen sich auch die Lösungen der quadratischen Gleichungen, sobald auf die Ausrechnung derselben Logarithmen verwendet werden sollen, umwandeln; so daß die Berechnung der Zahlenwerthe sehr erleichtert wird.

Hat man z. B. die Grund-Gleichung von der Form:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

also die Lösung:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

so ist dieselbe dem Verfahren unter III entsprechend unter die Form:

$$x = \frac{-B}{2A}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}}\right)$$

zu bringen und je nachdem nun $\frac{4\,AC}{B^2}$, resp. C, eine positive oder negative Größe ist, hat man die Wurzelgröße von der Form

$$\sqrt{1+m} \text{ oder } \sqrt{1-m};$$

daher:

$$x = -\frac{B}{2A}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{4\,AC}{B^2}}\right),$$

oder:

$$x = -\frac{B}{2A}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{4\,AC}{B^2}}\right),$$

wo C jedesmal eine positive Größe vorstellt.

Im ersten Falle setzt man $\frac{2}{B}\sqrt{AC} = \sin\varphi$ und im andern $\frac{2}{B}\sqrt{AC} = \operatorname{tg}\varphi$; es entsteht alsdann im ersten Falle:

$$x = -\frac{B}{2A}(1 \pm \cos\varphi),$$

also wenn x′ und x″ die beiden Wurzeln sind:

$$x' = -\frac{B}{A}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi \text{ und } x'' = -\frac{B}{A}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi;$$

und im andern Falle:

$$x = -\frac{B}{2A}\left(\frac{\cos\varphi \pm 1}{\cos\varphi}\right) = -\frac{B}{2A}\left(\frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

oder da $\frac{B}{2}\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{AC}$

$$x = -\sqrt{\frac{C}{A}}\cdot\left(\frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi}\right),$$

daher:

$$x' = -\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{C}{A}}$$

und

$$x'' = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Schließlich sei hier noch bemerkt, daß nicht immer das algebraisch einfachste und eleganteste Resultat das beste für die Ausrechnung mit Logarithmen ist. Ein treffendes Beispiel liefert hierzu die Flächeninhaltsformel der Polygonometrie, denn betrachtet man von den ver-

schiedenen Formen derselben §., in welchem Winkel vorkommen, die zweite, so ist leicht ersichtlich, daß es nur auf die Berechnung der Werthe:

$$a \sin A, \quad a \cos A$$
$$b \sin(A..B), \; b \cos(A..B)$$
$$c \sin(A..C), \; c \cos(A..C)$$
$$d \sin(A..D), \; d \cos(A..D).$$
und: $$e \sin(A..E), \; e \cos(A..E)$$
$$f \sin(A..F), \; f \cos(A..F)$$

ankommt, und daß deren Logarithmen mit den Aufschlagungen der sechs Seiten a, b, c, d, e, f und der sechs Winkel A, (A..B), (A..C), (A..D), (A..E) und (A..F) so gut wie gefunden sind.

Sucht man dann durch 6 weitere Aufschlagungen die Zahlenwerthe: a sin A, b sin (A..B) ꝛc., so kann man leicht die Zahlenwerthe der Klammergrößen [ ] berechnen, ihre Logarithmen aufsuchen und entsprechend mit den schon bekannten Logarithmen von a cos A, b cos (A..B) ꝛc. verbinden; die Zahlen hierzu liefern dann unmittelbar die Fläche. Im Ganzen hat man also hier 30 Aufschlagungen. Nimmt man aber zur Berechnung des Flächeninhalts die freilich algebraisch elegantere Endformel, so hat man die Aufschlagung von allein 15 Winkel und überhaupt 45 Aufschlagungen.

§. 57. **Die Genauigkeit, welche die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln bei der Ausrechnung der Winkel gewähren.** Betrachtet man die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, so wird man sich leicht überzeugen, daß die Logarithmen der Tangenten und auch der Sinus und Cosinus wenn die Winkel nicht grade sehr groß oder klein schon in der vierten Stelle der Mantisse einen Unterschied von wenigstens einer Einheit zwischen je zweien nur um eine Minute verschiedenen Winkeln zeigen. Man kann daher im Allgemeinen sagen, daß bei Winkeln, welche nicht völlig auf eine Minute genau bekannt sind, zur Rechnung logarithmisch-trigonometrische Tafeln genügen, welche die Mantissen bis auf vier Dezimalen enthalten; fünf Dezimalen der Mantisse genügen schon für Winkel, welche Theile der Minute (ohngefähr ⅕ bis ⅛ Minute) sicher haben, während sechsstellige Mantissen nur für Winkel, welche bis auf die einzelnen Secunden genau sind, nothwendig erscheinen. Zwar wäre eine Tafel, welche den genauesten Messungen genügte, für alle Fälle hinreichend, sie ist aber bei geringerer Schärfe der Messung weit unbequemer für die Ausführung der Rechnung als eine grade dieser Genauigkeit angepaßte.

Analog verhält es sich bei den gewöhnlichen Logarithmentafeln in Bezug auf die Anzahl der für die Logarithmen angegebenen Decimalstellen.

Durch eine größere Anzahl von Stellen wird aber die Tafel weit voluminöser und deßhalb für den Gebrauch unbequemer, als eine andere, welche die Mantissen mit nur einer geringeren Anzahl von Stellen gibt, indem an Raum hierbei weniger durch diese weggelassenen Ziffern, als vielmehr durch die geringere Menge von Zahlen, deren Logarithmen gegeben werden, erspart wird. Die bekannten 7stelligen Vega'schen Tafeln enthalten die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1079999 auf 200 Seiten; 5stellige Tafeln aber können die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 99999 auf 20 bis 24 Octavseiten und endlich 4stellige Logarithmentafeln auf nur zwei Seiten die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 9999 enthalten. Je größer die Seitenzahl der Tafel um so geringer ist natürlich ihre Bequemlichkeit, denn während man bei den 4stelligen Tafeln die Logarithmen aller Zahlen, die man suchen kann, auf einmal vor sich hat, muß man in den Vega'schen in einem dicken Bande hin und wieder blättern.

Der Rechnende hat natürlich bei der Ausführung seiner Rechnung immer die Genauigkeit der ihm durch die direkte Messung gegebenen Größen im Auge zu behalten, und diesen gemäß die Tafeln, deren er sich bedienen will, zu wählen; nimmt er solche, die eine größere Genauigkeit der Rechnung zulassen, als die der gemessenen Größen ist, und will er hierdurch eine eingebildete Genauigkeit der Rechnung erzielen, so zeigt er keine lobens- und achtenswerthe Pünktlichkeit, sondern vielmehr, daß er sich des eigentlichen Zwecks der Rechnung gar nicht bewußt ist, oder daß er ihn aus den Augen verloren hat.

Welcher Art von Logarithmentafeln man sich aber bei einer Rechnung zu bedienen habe, die auf Messungsresultate von irgend welcher Genauigkeit gestützt ist, mag aus den Worten eines Mannes einleuchtend werden, den wir als Gewährsmann aufführen dürfen, eines Astronomen, der die vielfältigsten Rechnungen ausgeführt, dessen Name sogar durch eine seiner Berechnungen besondere Berühmtheit erlangt hat; wir meinen Encke, der in dem berliner astronomischen Jahrbuch für 1835, S. 257, folgendes sagt:

„Möge es erlaubt sein, daran zu erinnern, wie viele Zeit bei Rechnungen aller Art dadurch erspart wird, daß man gleich anfangs die anzuwendenden Mittel dem zu erreichenden Zwecke gemäß wählt. Wenn man blos auf Minuten bei den Winkeln, also etwa auf den

$\frac{1}{1000}$ sten Theil der Lineargrößen*) ausgehen will, so werden bei gehöriger Benutzung der zweckmäßigsten analytischen Formeln Logarithmentafeln von 4 Decimalen ausreichen. Tafeln von 5 Decimalen geben unter denselben Verhältnissen die Winkel bis etwa 5″, die Lineargrößen auf den vierzigtausendsten Theil genau, selbst bei längeren Rechnungen. Mit 6 Decimalen hat man fast die halbe Sekunde sicher, mit sieben den zwanzigsten Theil einer Sekunde, seltene Ausnahmen abgerechnet. Die Zeitersparniß ist dabei höchst beträchtlich. Bei einerlei Rechnung verhält sich der Zeitaufwand für sieben, sechs und fünf Decimalen nahe wie 3 : 2 : 1. Zugleich aber gibt diese vorläufige Ueberlegung, außer dem Beweise, den sie ablegt, daß der Berechner sich seiner Aufgabe völlig bewußt war, auch bei häufigerer Wiederholung einen sehr sicheren Takt in der Unterscheidung des Wesentlichen von dem Unwesentlichen, und lehrt sehr scharf das Trennen, was zur Ermittlung des wahren Resultats nothwendig ist, von dem, was nur als eine imaginäre Zahlengenauigkeit betrachtet werden muß."

Es muß hierzu jedoch bemerkt werden, daß für gewisse Funktionen mancher Winkel die trigonometrischen Tafeln nicht mehr die oben erwähnte Genauigkeit gewähren können. Sobald man nämlich in der Endformel deren Ausrechnung in Zahlen die unbekannten Winkel oder Bogen ergeben soll, diese durch ihren Sinus oder Cosinus ausgedrückt hat, muß man beachten, daß die Tafeln mit Hülfe des Cosinus den Winkel (oder die sphärische Dreiecksseite), wenn dieselben sehr klein oder sehr nahe an 180° sind, nicht genau ergeben kann; und daß dasselbe für den Sinus stattfindet, wenn die Winkel (oder die sphärischen Dreiecksseiten) sehr nahe an 90° betragen.

Betrachten wir so die Tafel der Cosinus für kleine Winkel, so ist z. B. in der vierstelligen Tafel der log. cos von 3° 47′ an bis 3° 36′ gleich 0,9991—1 und von da bis 3° 22′ gleich 0,9992—1 und endlich von da bis 3° 9′ gleich 0,9993 — 1 u. s. w. Hat man also den log. cos x durch die Rechnung vierstellig gleich 0,9992—1 erhalten, so kann man der Tafel zufolge jeden Winkel von 3° 22′ bis 3° 36′ als x annehmen; muß man aber noch annehmen, daß die letzte Ziffer des Logarithmus des Resultats, wie dies fast immer der Fall sein wird, um 1 größer oder kleiner sein dürfte, so ist der Spielraum, der durch diese

*) Bei den gewöhnlichen Instrumenten (Klafterstäben ꝛc.), die man zur Messung von Entfernungen gebraucht, ist wohl nie, auch nicht in den günstigsten Fällen, eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ zu erreichen, d. h. man kann nicht so genau messen, daß der wahrscheinliche Fehler der Messung nur $\frac{1}{1000}$ der ganzen Entfernung betrüge, ebenso werden die Winkel mit den gewöhnlichen Meßinstrumenten, deren sich die Geometer, Markscheider ꝛc. bedienen, auch wohl immer um eine Minute unsicher.

geringe Ungenauigkeit dem x gelassen ist, zwischen $3^0\,9'$ und $3^0\,47'$, also über einem halben Grad. — Bei noch kleineren Winkeln geht dies noch weiter; der Werth 0,9998—1 gilt für den log. cos $1^0\,56'$ eben so gut wie für $1^0\,21'$ und wenn man die letzte (vierte) Stelle der Mantisse hier um 1 unsicher annehmen muß, läßt die daraus folgende Unsicherheit den Winkel zwischen $2^0\,17'$ und $0^0\,53'$ unsicher.

Aehnlich verhält es sich für den Sinus nahe bei 90^0 und dem Cosinus nahe bei 180^0.

Hat man 5stellige Logarithmen, so ergeben sich auch die kleineren Winkel etwas genauer, aber es bleibt dasselbe Verhältniß, denn an 5stellige Logarithmen verlangt man auch im Allgemeinen die Genauigkeit von $5''$. Für den $\log. \cos x = 0{,}99991 - 1$ ist x von $1^0\,11'$ bis $1^0\,9'$, für $\log. \cos x = 0{,}99992 - 1$ ist x von $1^0\,8'$ bis $1^0\,4'$ und endlich für $\log. \cos x = 0{,}99993 - 1$ ist x von $1^0\,3'$ bis $1^0\,0'$ unsicher; so daß der Fehler von x bei Unsicherheit der letzten Stelle der Mantissen um eine Einheit von $1^0\,0'$ bis $1^0\,11'$ geht.

Weiß man nun bei der Entwickelung der Formeln im Voraus daß sie auf solche Werthe angewendet werden sollen, welche x sehr klein oder nahe bei 90^0 oder 180^0 ergeben, so kann man oft in der Rechnung eine solche Umgestaltung der Formel vornehmen, daß der unbekannte Winkel durch eine Funktion, welche ihn genau ergibt ausgedrückt erscheint. Hierbei ist übrigens zu bemerken, daß jeder Winkel, von welcher Größe er auch sein mag, durch die Tangente und Cotangente immer genau genug erhalten wird.

I. Hätte man z. B. im rechtwinkligen sphärischen Dreieck aus den beiden Winkeln B und C die Hypothenuse x zu berechnen, so ist:

$$\cos x = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,$$

also ist für Werthe von cos x die dem 1 nahe liegen das x ungenau. Bedenkt man aber hier, daß $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$ ist, so entsteht:

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C}{2}} = \sqrt{\frac{-\cos (B + C)}{2 \sin B \sin C}},$$

wodurch x sehr genau erhalten werden kann.

Man hätte auch durch cos x den Werth:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

berechnen können und:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}}$$

erhalten, was noch bequemer als das obige Resultat.

Um aus den beiden Winkeln B und C im rechtwinkligen sphärischen Dreieck die Kathete b (y) zu erhalten, hat man:

$$\cos y = \frac{\cos B}{\sin C},$$

welche Formel das y, wenn es klein ist, nicht genau ergibt. Auf demselben Weg wie oben erhält man:

$$\sin \tfrac{1}{2} y = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos B}{\sin C}\right)} = \sqrt{\frac{\sin C - \cos B}{2 \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\left(45^0 + \frac{B-C}{2}\right) \sin\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)}{\sin C}}$$

oder auch:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y = \sqrt{\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{B-C}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)}. —$$

II. Sucht man in einem rechtwinkligen Dreieck die Kathete b (y) aus B und a, so hat man

$$\sin y = \sin a \sin B.$$

Ist nun aber y nahe an 90^0, so benutzt man die Formel:

$$\sqrt{\frac{1 - \sin y}{1 + \sin y}} = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{y}{2}\right)$$

(aus (36) und (37) pag. 67.)

und hat so:

$$\operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2} y) = \sqrt{\frac{1 - \sin a \sin B}{1 + \sin a \sin B}},$$

woraus y genau erhalten wird; man kann diese Formel noch bequemer zur Rechnung machen, wenn man $\sin a \sin B = \operatorname{tg} \varphi$ setzt; es ist alsdann:

$$\operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2} y) = \sqrt{\operatorname{tg}(45^0 - \varphi)}.$$

Aehnlich wird man sich in andern Fällen zu helfen wissen.

§. 58. **Zahlenbeispiele.** Um bei der Ausführung von Zahlenrechnungen die ganze Arbeit von vornherein und auf einmal zu übersehen und so jedes unnütze Rechnen und besonders Aufschlagung vermeiden zu können, ist es von Vortheil, sich vor dem Beginn der Rechnung, ein ent-

sprechendes Formular zu construiren, in welches alle einzelnen Zahlenwerthe, welche aufzuschlagen und zu berechnen sind, eingetragen werden.

Wir deuten die Art, wie dies geschehen mag, durch folgende Beispiele an:

I. Es sei in der Aufgabe (15) des §. 46, (pag. 114) die Entfernung AC = 2731 und BD = 1987, der Winkel $\alpha = 19^0\,7'$, $\beta = 31^0\,5'$ und $\gamma = 14^0\,57'$.

Wandeln wir die Endformel nach Art des §. 56 um so entsteht, wenn:

$$\frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a\,b\,\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}} = \operatorname{tg}\varphi$$

gesetzt wird:

$$x = \tfrac{1}{2}(a+b)\left(-1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

oder:

$$x = \tfrac{1}{2}(a+b)\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\varphi.$$

Bezeichnen wir nun mit A den Werth

$$\sqrt{\frac{a\,b\,\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}} \quad \text{(I.)}$$

so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\,A}{a+b} \quad \text{(II.)}$$

und

$$x = A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{(III.)}$$

Es wäre also hier das Formular:

I.		II.		III.	
log. 2731	. . .	log. A .	. . .	log. A .	. . .
log. 1987	. . .	log. 2 .	. . .	log. tg $\frac{1}{2}\varphi$	. . .
log. sin 65° 9′	. . .	cp. log. 4718	. . .	log. x .	. . .
log. sin 31° 5′	. . .	log. tg. φ	. . .	x .	. . .
cp. log. sin 19° 7′ *)	. . .	φ . .	. . .		
cp. log. sin 14° 57′	. . .	$\frac{1}{2}\varphi$ . .	. . .		
log. A .	. . .				

*) Das cp. log. bedeutet im Allgemeinen das Complement der Logarithmen d. h. die nach §. 14 der Arithmetik (neue Ausgabe, pag. 16) genommene arithme-

Das Resultat der Rechnung ist $x = 3612$.

II. In der Aufgabe (17) des §. 46 sei $AB = a = 1153{,}7$, $CB = b = 849{,}4$, der Winkel $B = 112^\circ\,25'$, $\alpha = 27^\circ\,31'$ und $\beta = 19^\circ\,14'$.

Rechnet man nach dem §. 56 IV. gegebenen Resultat dieser Aufgabe, so ist

$$\text{(I.)}\quad \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \operatorname{tg} \varphi,$$

und

$$\text{(II.)}\quad \operatorname{cotg.} \tfrac{1}{2}(x - y + \alpha - \beta) = \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(B + \alpha + \beta).$$

Man erhält hieraus den Werth

$x - y + \alpha - \beta$ als bekannte Größe gleich γ; setzt man nun $x - y = \gamma + \beta - \alpha = \delta$, so ist

$$\text{(III.)}\quad x = \tfrac{1}{2}(B + \delta) \text{ und } y = \tfrac{1}{2}(B - \delta);$$

Das Formular ist mithin:

I.		II.		III.	
log. 1153,7 . . .	. . .	log. ctg $\frac{1}{2}(B+\alpha+\beta)$	. . .	$\frac{\delta}{2}$	. . . .
cp. log. 849,4 . .	. . .				
log. sin. 19° 14′	. . .	log. tg $(45^\circ + \varphi)$	. . .	$\frac{B}{2}$	. . . .
cp. log. sin 27° 31′	. . .				
log. tg φ . .	. . .	log. cotg $\frac{1}{2}\gamma$.	. . .	x	57° 3′
φ . . .	44° 5′	γ . .	4° 59′	y	55° 22′
45° + φ .	89° 5′	$\beta - \alpha$.	. . .		
		δ . .	. . .		
		$\frac{\delta}{2}$ . .	. . .		

III. Sind in der Aufgabe (19) des §. 46:

$CD = a = 1750'$

und $DE = b = 1047'$ und die Winkel:

---

metische Ergänzung der Logarithmen. Bei den Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, die negativ sind, bedeutet es weiter nichts, als daß nach gewechseltem Zeichen die negative Mantisse von der positiven Kennziffer abgezogen und das Resultat hergesetzt wird. —

$$\alpha = 19^0\,27'$$
$$\beta = 13^0\,14' \text{ und}$$
$$\gamma = 10^0\,48',$$

so erhält man AB = x = 1066'.

Achtes Capitel.

Anhang.

§. 59. **Einige Aufgaben über Theilung von Figuren.** Die Theilung von Figuren kann auf verschiedene Art verlangt werden, indem die Theilungslinien entweder alle von einem Punkt auslaufen oder einer gegebenen Linie parallel sein sollen. Im ersten Falle kann der Punkt eine Ecke der gegebenen Figur sein, oder auf einer Seite liegen, oder irgend wo innerhalb der Figur oder endlich ganz außerhalb derselben; im anderen Falle können die Theilungslinien einer Seite der Figur oder einer ihr fremden Linie parallel sein sollen.

Bei jeder Theilung von Figuren kommt es vor allen auf die Ermittlung des ganzen Inhalts und sodann auf dessen Repartition nach den vorgeschriebenen Verhältnissen an. Sodann ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den Theilungen bei welchen die Theilungslinien von einem Punkt ausgehen sollen und denjenigen, wo sie parallel zu einer Linie werden sollen. Unter den ersten ist wieder ein Unterschied darin, ob der Punkt außerhalb der Figur oder nicht außerhalb liegt.

Hat man z. B. die Flächen der einzelnen zu erhaltenden Theile f_1, f_2, f_3 . . . berechnet und ist der Punkt, von welchem die Theilungslinien auslaufen sollen die Ecke D, Fig. (57), wobei der erste Theil f_1 an der Linie DE anliegen soll, so ist zuerst zu ermitteln, ob $f_1 \overset{<}{\underset{>}{=}}$ als die Dreiecksfläche ADE (die letztere Fläche muß also zu dem Ende berechnet sein). Für den Fall, daß $f_1 <$ als ADE, wird die Theilunglinie GD zwischen A und D die Grade AE treffen und eine Größe x_1 = EG von ihr abschneiden; es ist also:

$$f_1 = \frac{e\,x_1 \sin E}{2} \text{ oder } x_1 = \frac{2\,f_1}{e \sin E}.$$

Um nun die zweite Theilungslinie zu erhalten, fragt es sich ob $f_1 + f_2 \overset{>}{\underset{<}{=}}$ ADE und im Falle $f_1 + f_2 >$ ADE, weiter, ob

$f_1 + f_2 \gtreqless ADE + ABD$ ist; für den letzten Fall trifft die zweite Theilungslinie die Grade AB zwischen A und B und schneidet an ihr das Stück $x_2 = AH$ ab. Es ist mithin:

$$f_1 + f_2 - ADE = \frac{x_2 \, g \sin DAB}{2} \quad (\text{wo } AD = g),$$

also:

$$x_2 = \frac{2(f_1 + f_2 - ADE)}{g \sin DAB};$$

wobei der Winkel DAB als bekannt vorausgesetzt wird und bei der Ausführung der Rechnung zuerst ermittelt werden muß. Auf ähnliche Weise findet man die übrigen Theilungslinien.

Hätte der Punkt, von welchem die Theilungslinien ausgehen, auf einer Seite oder innerhalb der Figur gelegen, so wäre auf ganz entsprechende Weise verfahren worden.

Liegt der Theilungspunkt aber außerhalb der Figur, so ist zuerst folgende Aufgabe zu lösen:

An einem gegebenen Winkel α, Fig. (58), soll von einem außerhalb liegenden gegebenen Punkt D aus eine bestimmte Fläche $f = AEB$ abgeschnitten werden.

Es sei die Lage des Punktes D außerhalb durch die beiden Graden $AC = a$ und $DC = b$ und den Winkel $ACD = \beta$ gegeben; es bestehen dann, wenn $AB = x$ und Winkel $ABE = y$ gesetzt wird, die beiden Gleichungen:

$$f = \frac{x^2 \sin \alpha \sin y}{2 \sin (\alpha + y)} \quad \text{und} \quad a - x = \frac{b \sin (\beta + y)}{\sin y}$$

oder:

$$x^2 = 2 f (\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} \alpha)$$

und:

$$x = a - b (\sin \beta \operatorname{cotg} y + \cos \beta) = a - b \cos \beta - b \sin \beta \operatorname{cotg} y.$$

Zwei Gleichungen, woraus, cotg y eliminirt und dann x selbst bekannt wird; ꝛc.

Wendet man diese Methode auf ein Polygon an, welches, Fig. (59), vom Punkt F aus getheilt werden soll, und ist f_1 der Inhalt des ersten (an AE anliegenden) Theiles, so ist zuerst zu ermitteln ob $f_1 \gtreqless$ als die Fläche AEG. Im letzten Falle wird direct nach der obigen Angabe gerechnet, indem der Winkel E in Betracht kommt; im ersten aber muß die Theilungslinie die Seite AB treffen, und man hat zuerst

den Winkel und die Fläche EHA zu ermitteln und dann das von H aus gezählte x mit Hülfe dieses Winkels so zu berechnen, daß der abgeschnittene Inhalt gleich $f_1 + AHE$ wird; ähnlich wird weiter verfahren werden, nur muß, sobald die Theilungslinie die Seite BC, welche in der Richtung von C gegen ED convergirt, schneidet, von eben dieser Richtung her die Rechnung gemacht werden.

Sollen endlich die Theilungslinien einer Seite parallel sein, wie Fig. (60), so wird man die Aufgabe (5) §. 46 umkehren und aus dem bekannten f das $h = x \sin A$ oder x selbst suchen. Zur Berechnung der Theilungslinien, welche die Seite BC, DC 2c. treffen, hat man vorher die zu denselben parallelen Linien BH und DI zu ziehen und die Inhalte ABHE, BIDH zu berechnen und erforderlichen Falls an der Summe $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ abzuziehen. — —

Wenn auch diese kurzen Andeutungen keine vollständige Lehre der Theilungen zu geben im Stande sein können, so genügen sie doch einigermaßen für Jeden, der solche Uebung in trigonometrischen Rechnungen hat, wie sie nach genauem Studium des vorliegenden Werkes vorausgesetzt werden darf; wir geben daher nur noch einige Zahlenaufgaben mit ihren Lösungen:

I. Es sei ein Viereck durch drei seiner Seiten a, b und c und zwei von ihnen eingeschlossene Winkel A und B gegeben; und zwar sei:

$$a = 283{,}24,$$
$$b = 315{,}76$$
$$c = 460{,}33$$
$$A = 119^0 47'$$
$$B = 97^0 25'.$$

Innerhalb dieses Vierecks liegt der Theilungspunkt M der Art, daß wenn man auf die Seite a von D nach A hin die Größe $DE = d = 104{,}37$ aufträgt und den Winkel $DEM = E = 135^0\ 15'$ macht, man noch die Länge $EM = 112{,}19$ zu nehmen hat, um zu ihm (M) zu gelangen. Das Verhältniß der zu erzielenden Flächeninhalte sei 7:5:3:2, wobei der erste Theil an der Linie EM nach A hin liegen soll.

Da wir bei Bestimmung der Theilungslinien die Inhalte, sowie die Winkel und Seiten der Dreiecke MEA, MAB, MBC, MCD und MED nöthig haben, so berechnen wir den ganzen Inhalt mit Hülfe dieser Theile, und erhalten so zuerst

den Winkel $MAB = 81^0\ 15'$
die Seite $MA = 126{,}84$
und Fläche $MAB = 7066{,}6 = F_1$;

sodann:

$$\text{Winkel } MBC = 74^0\ 29'$$
$$\text{Seite } MB = 321{,}96$$
$$\text{Fläche } MBC = 19792 = F_2,$$

und weiter:

$$\text{Winkel } MCB = 39^0 40$$
$$\text{Seite } MC = 486{,}07$$
$$\text{und Fläche } MCB = 71405 = F_3.$$

Nun übergehen wir die Berechnung des Dreiecks MCD und gehen an MED; dies ergiebt:

$$\text{Winkel } MDE = 23^0\ 14'$$
$$\text{Winkel } EMD = 21^0\ 30'$$
$$\text{Seite } MD = 200{,}08 \text{ und}$$
$$\text{Fläche } MED = 4122{,}6 = F_5.$$

Durch Subtraction der bekannten Winkel in der Figur DABCM von der gehörigen Winkelsumme folgt dann Winkel $CMD = 100^0\ 6'$ und hierdurch die

$$\text{Fläche } CMD = 47872 = F_4 \text{ und}$$
$$\text{Winkel } MDC = 59^0\ 12'.$$

Die Summe aller fünf Flächen ist also = 150258,2; daher die einzelnen vier Theile:

$$f_1 = 61870$$
$$f_2 = 44193$$
$$f_3 = 26516$$
$$f_4 = 17677.$$

Es ist nun:

$$f_1 - (F_1 + F_2) = 35011,$$

und fällt also die erste Theilungslinie in das Dreieck MBC; daher ist:

$$x_1 = \frac{35011}{160{,}98.\ \sin 74^0\ 29'} = 225{,}7,$$

wo x_1 von B nach C hin gezählt ist.

Weiter ist:

$$f_1 + f_2 - (F_1 + F_2 + F_3) = 7799,$$

also trifft die zweite Theilungslinie die Seite CD und es ist:

$$x_2 = \frac{7799}{243{,}03.\ \sin 20^0\ 42'} = 90{,}79;$$

x_2 ist hierbei von C nach D hin gezählt. Endlich ist:

$$f_1 + f_2 + f_3 - (F_1 + F_2 + F_3) = 34315,$$

es fällt daher diese Theilungslinie in dasselbe Dreieck wie x_2 und es ist:

$$x_3 = \frac{34315}{243{,}03.\ \sin 20^0\ 42'} = 399{,}45,$$

wo x_3 ebenso wie x_2 gezählt ist. —

II. In einem Viereck ABCD sind die Seiten AB = 163,6 und BC=138,5 und die Winkel A = 76° 27′, B = 81° 44′ und C = 129° 12′ bekannt; man soll dasselbe durch zwei Parallelen, die mit AB einen Winkel von 21° 8′ machen, in drei Theile, welche sich wie 5 : 7 : 8 verhalten, theilen, so daß der kleinste Theil zunächst an AB liegt.

Zieht man durch B die Parallele BF zu den Theilungslinien, so ist AF=59,50; zieht man durch E die Parallele CE zu den Theilungslinien, so ist DE = 19,34; F ist = 21990; x und y liegen zwischen F und E, die Länge der durch x gehenden Grenzlinie ist 158,4 und ihr senkrechter Abstand von BF = 4, 8; die Länge der durch y gehenden Theilungslinie ist 135,8; ihr senkrechter Abstand von BF = 57,14.

III. Außerhalb eines Winkels, der 67° 48′ ist ein Punkt durch seinen senkrechten Abstand von einem Schenkel = 14,4 und die Entfernung des Fußpunktes dieser Senkrechten von dem Scheitel = 28,6 gegeben. Man soll durch diesen Punkt Linien ziehen, die den Winkel schneiden und mittelst dessen Schenkel Figuren (wovon die erste ein Dreieck ist) abgrenzen, deren Inhalt sämmtlich = 360.

Bezeichnet man der Reihe nach, von A an gerechnet, die auf dem Schenkel AB abzuschneidenden Stücke mit x_1, x_2, x_3 . . ., so ist x_1 = 23,46; x_2 = 27,12 und x_3 = 28,90. Bezeichnet man ebenso die Stücke des anderen Schenkels mit y_1, y_2, y_3 . . ., so ist y_1 = 33,14; y_2 = 57,33; y_3 = 80,69.

IV. Ein Fünfeck ABCDE ist durch die Seiten AB = 28,4, AE = 49,6, BC = 45,8, und CD = 44,4 und die Winkel A = 131° 28′, B = 67° 12′ und C = 145° 27′ völlig gegeben; ebenso ein außerhalb desselben liegender Punkt m der Lage nach dadurch, daß die Linie mA über A hinaus verlängert ist, bis sie BC in n schneidet, wobei man Bn = 18,6 und Am = 12,8 kennt; man soll die Figur von m aus in drei Theile, die sich wie 5 : 7 : 8 verhalten, theilen, so daß der kleinste Theil an der Seite AB anliegt.

Benennt man die Endpunkte der Grenzlinien auf der Seite AE mit x_1 und x_2, so ist Ax_1 = 2,98 und Ax_2 = 7,12. —

§. 60. **Die cyclometrischen Funktionen.** Wir wollen hier noch eine Art von Funktionen erwähnen, die, obgleich nicht direkt zur Trigonometrie gehörig, doch mit den trigonometrischen Funktionen im engsten Zusammenhang stehen. Es sind dies die cyclometrischen Funktionen.

Will man nämlich ausdrücken, daß y die Größe des Sinus für den Winkel (Bogen) x sei, so schreibt man:

$$y = \sin x.$$

Will man aber das Umgekehrte aussprechen, daß nämlich x der Bogen (Winkel) ist, dessen Sinus die Größe y habe, so schreibt man dies:

$$x = \text{arc}\ (\sin = y), \text{ oder auch:}$$

$$x = \text{arc}\ \sin\ y.$$

Auf ähnliche Art sind gebildet und leicht zu verstehen die Ausdrücke:

$$y = \cos x, \text{ und daraus } x = \text{arc}\ (\cos = y),$$

$$y = \text{tg}\ x, \text{ und daraus } x = \text{arc}\ (\text{tg} = y), \text{ ꝛc.}$$

Es sind diese Ausdrücke das, was man gewöhnlich als cyclometrische Funktionen bezeichnet.

Man kann ohne Schwierigkeit einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen cyclometrischen Funktionen auffinden; so z. B. da $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$, so ist, wenn $x = \text{arc}\ (\cos = y)$:

$$\frac{1}{y^2} = 1 + \text{tg}^2 x, \text{ oder } \text{tg}^2 x = \frac{1}{y^2} - 1$$

oder endlich:

$$x = \text{arc}\ \left(\text{tg} = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}\right);$$

ist aber $x = \text{arc}\ (\text{tg} = z)$, so ist:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

oder

$$x = \text{arc}\ \left(\cos = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}\right).$$

Aehnlich erscheint der Zusammenhang zwischen arc. sin und arc. cotg; ist nämlich:

$$x = \text{arc}\ (\sin = y), \text{ so ist:}$$

$$x = \text{arc}\ \left(\text{cotg} = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}\right);$$

und wenn $x = \text{arc}\ (\text{cotg} = z)$, so ist:

$$x = \text{arc}\ \left(\sin = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}\right).$$

Man kann auch leicht Formeln angeben, welche den Zusammenhang zwischen den Funktionen zweier Bögen und denen ihrer Summe enthalten. So ist z. B. wie leicht einzusehen, wenn

$$x = \text{arc}\,(\sin = y) \text{ und}$$
$$x' = \text{arc}\,(\sin = y')$$
$$x + x' = \text{arc}\,(\sin = y \cdot \sqrt{1 - y'^2} + y' \cdot \sqrt{1 - y^2})$$
$$= \text{arc}\,(\cos = \sqrt{1 - y^2} \cdot \sqrt{1 - y'^2} - yy'),$$
$$\text{und } x - x' = \text{arc}\,(\sin = y\sqrt{1 - y'^2} - y'\sqrt{1 - y^2})$$
$$= \text{arc}\,(\cos = \sqrt{1 - y^2} \cdot \sqrt{1 - y'^2} + yy');$$

eben so ist, wenn:

$$x = \text{arc}\,(\text{tg} = y)$$
$$\text{und } x' = \text{arc}\,(\text{tg} = y')$$
$$x + x' = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{y + y'}{1 - yy'}\right).$$

Berichtigungen.

Seite 4, Zeile 3 von oben, lies Proportionen statt Propotionen.

„ 5, „ 5 „ unten, „ Paragraphen „ Pargraphen.

„ 7, „ 1 „ oben, „ im statt in.

„ 7, „ 17 „ „ „ des „ der.

„ 10, „ 3 „ „ „ h' „ h'^2.

„ 10, Formel (19^a) fehlt der Bruchstrich.

„ 10, Zeile 10 von unten, lies AC statt BC.

„ 24, „ 9 „ „ „ ihm „ ihn.

„ 27, „ 2 „ „ „ ist in seiner ꝛc. statt ist seiner ꝛc.

„ 43, „ 20 „ oben, „ Verhältniß statt Verhltniß.

„ 56, „ 16 „ unten, „ Rechnungsoperationen statt echnungsoperationen.

„ 56, „ 15 „ „ „ auf statt uf.

„ 56, „ 8 „ „ „ können statt könnn.

„ 56, „ 7 „ „ „ Goniometrie statt Goniometr

„ 56, „ 4 „ „ „ Geometrie „ Geometie.

„ 56, „ 3 „ „ „ ihren statt ihre.

„ 61, Formel (2) lies $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta$ ꝛc. st. $\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta$ ꝛc.

„ 65, „ (27) „ $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}$ statt $\cos A - \cos$ $= B - 2\sin\frac{A+B}{2}$ ꝛc.

„ 67, „ (41) „ $\operatorname{cotg}(45^0+\alpha)$ statt $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)$.

„ 68, Zeile 3 von unten, lies $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ statt $\sin 2\beta \sin 2\beta$.

„ 69, Aufgabe (8) lies $1 - \operatorname{tg}\alpha$ statt $1 = \operatorname{tg}\alpha$.

„ 71, Zeile 11 von unten, lies $[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ statt $[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$.

„ 71, Aufgabe (21) muß heißen: $-4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$.

„ 78, Zeile 2 von oben, lies das statt daß.

„ 78, „ 5 „ „ „ $2y\cos A$ statt $y\cos A$.

„ 80, „ 6 „ unten, „ $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$ statt $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B$.

„ 86, „ 14 „ oben „ Fig (35^a) statt Fig. (36).

„ 90, Formel (35) lies $\cos\frac{1}{2}B$ statt $\sin\frac{1}{2}B$.

„ 91, Zeile 3 von unten lies durch statt drch.

„ 93, Aufgabe (14) lies $2R^2 \sin A \sin B \sin C$ statt $4R^2 \sin A \sin B \sin C$.

„ 99, Zeile 2 von oben fehlt der Bruchstrich.

„ 117, „ 8 „ unten, lies $90^0+\alpha$ und $90^0+\beta$ statt α und β.

„ 139, „ 4 „ oben, „ Kantenwinkel statt Kan=.

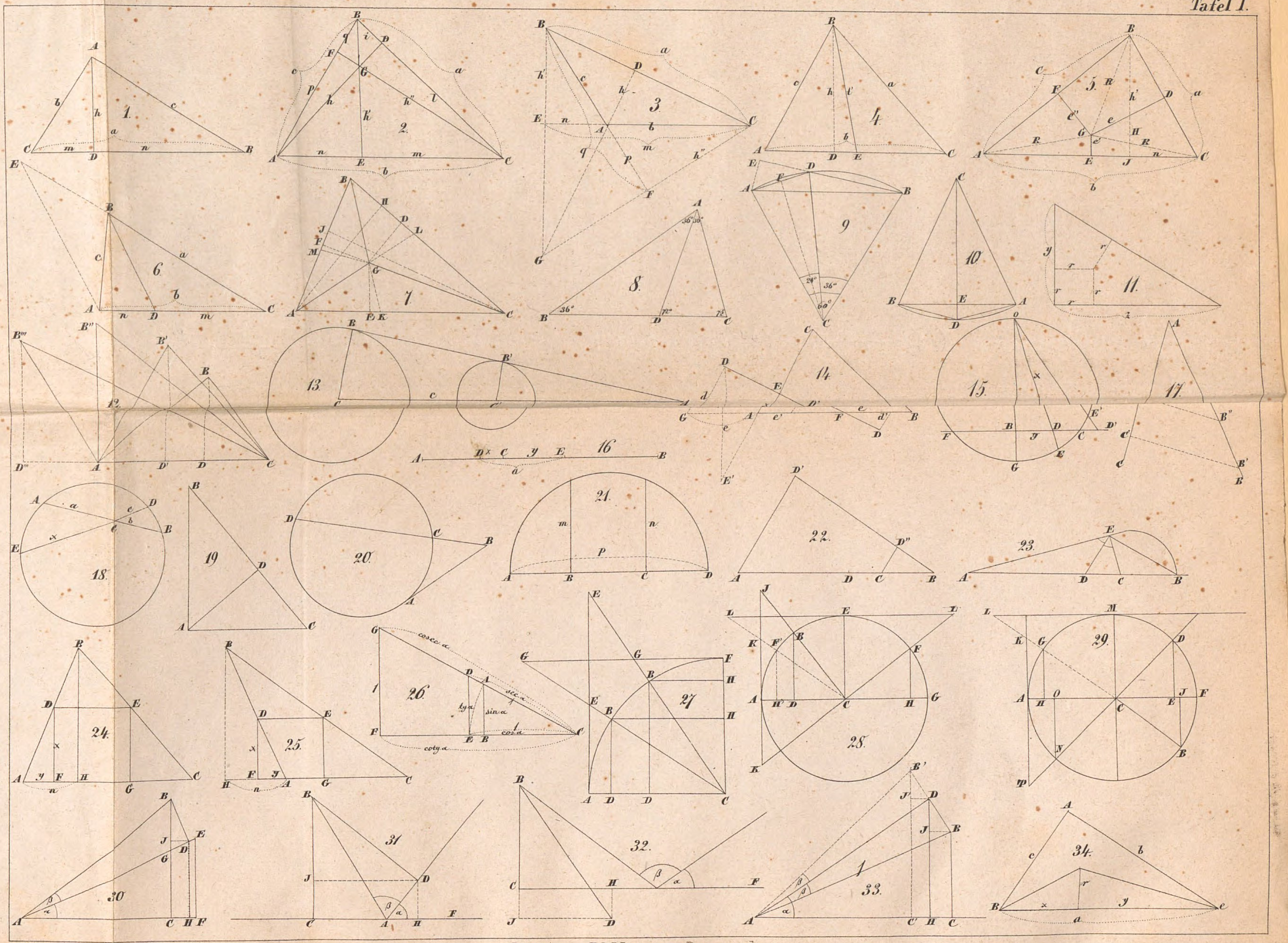
„ 139, „ 8 „ „ „ an der Spitze betrachtet, sind ꝛc. statt an der Spitze sind ꝛc.

„ 141, „ 16 „ „ „ aus jenen des §. 40 berechnet, zu Hülfe statt aus jenem §. 40 zu Hülfe.

„ 141, „ 11 „ unten „ $\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$ statt $\sin^2 A \sin^2 B \sin^2$.

„ 141, „ 11 „ „ „ $\sin^2 B (\cos F +)$ statt $\sin^2 (\cos F +)$.

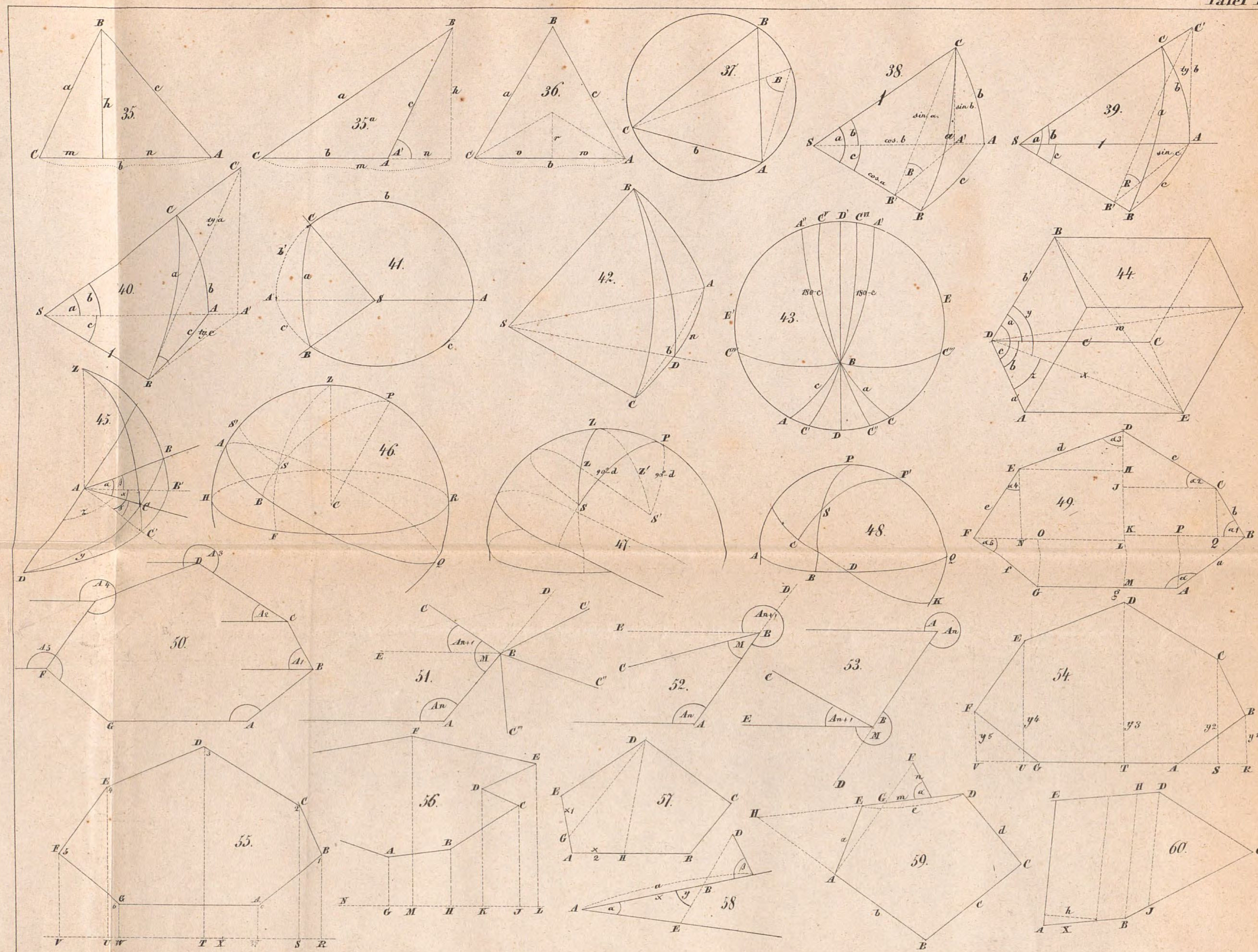
Tafel I.



Lith Anst v. Ed. Wagner in Darmstadt.



Tafel II.



Lith. Anst. v. Ed. Wagner in Darmstadt

Fren

Fischer, Ph.

Lehrbuch der algebraischen Geometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie nebst polygonometrie

Darmstadt 1854